

## Planche d'exercices n°2

Statistiques à deux variables

Terminale Techno – Chapitre 7

### Exercice 31 – Coefficient complet [ Correction ]

Calculez le coefficient de corrélation  $r$  pour les données :

$x$	1	2	3	4
$y$	3	5	7	9

Vérifiez que  $r = 1$  (corrélation parfaite).

### Exercice 32 – Pente et ordonnée [ Correction ]

À partir des données de l'exercice 31, calculez  $a$  et  $b$  de la droite  $y = ax + b$ . Vérifiez la droite passe par  $(\bar{x}, \bar{y})$ .

### Exercice 33 – Résidus [ Correction ]

Avec les données de l'exercice 31, calculez les résidus  $e_i = y_i - \hat{y}_i$  pour chaque point. Vérifiez que la somme des résidus est zéro.

### Exercice 34 – Prédiction précise [ Correction ]

Un ensemble a 20 données avec  $\bar{x} = 5,2$ ,  $\bar{y} = 12,8$ ,  $a = 2,1$ . Calculez  $\hat{y}$  pour  $x = 8$ .

### Exercice 35 – Covariance [ Correction ]

Calculez la covariance  $\text{Cov}(x, y)$  puis le coefficient de corrélation  $r$  pour les données :

$x$	2	4	6
$y$	5	10	15

### Exercice 36 – Deux moyennes [ Correction ]

Un nuage a points  $(2, 4)$  et  $(6, 8)$ . Trouvez l'équation de la droite passant par ces deux points.

### Exercice 37 – Vérification moyennes [ Correction ]

La droite  $y = 1,5x + 1$  passe-t-elle par les points  $(2, 4)$  et  $(6, 10)$ ? Vérifiez les moyennes.

### Exercice 38 – Intersection [ Correction ]

Les droites  $y = 2x + 1$  et  $y = -x + 7$  se croisent-elles au point moyen du nuage  $(2, 5)$  et  $(4, 9)$ ?

### Exercice 39 – Alignement [ Correction ]

Montrez que les trois points  $(1, 2)$ ,  $(3, 5)$ ,  $(5, 8)$  ne sont pas alignés. Trouvez la meilleure droite.

### Exercice 40 – Interpolation simple [ Correction ]

Avec la droite  $y = 2,5x - 1$ , prédisez  $y$  pour  $x = 3,5$  (interpolation).

### Exercice 41 – Extrapolation critique [ Correction ]

La droite  $y = 1,2x + 5$  est basée sur des données entre  $x = 1$  et  $x = 10$ . Critiquez une prédiction pour  $x = 100$ .

### Exercice 42 – Fiabilité [ Correction ]

Un modèle a  $r = 0,85$ . Peut-on faire confiance à une prédiction pour  $x$  très éloigné du domaine initial?

### Exercice 43 – Domaine valide [ Correction ]

Les données sont  $x \in [10, 50]$ . Pour quelles valeurs de  $x$  la prédiction est-elle valide?

### Exercice 44 – Logarithme [ Correction ]

Avec les données  $(1, 2)$ ,  $(2, 4)$ ,  $(4, 8)$ , posez  $z = \log(y)$  et trouvez la droite  $z = ax + b$ .

### Exercice 45 – Exponentiel [ Correction ]

Le modèle  $y = e^{0,5x+1}$  correspond à quel modèle linéaire en  $z = \log(y)$ ?

### Exercice 46 – Changement variab. [ Correction ]

Transformez  $y = 3 \cdot 2^x$  en modèle linéaire. Trouvez  $a$  et  $b$  dans  $\log(y) = ax + b$ .

### Exercice 47 – Prédiction expon. [ Correction ]

Avec  $\log(y) = 0,3x + 1,5$ , prédisez  $y$  pour  $x = 5$ .

### Exercice 48 – Racine carrée [ Correction ]

Les données  $(1, 2)$ ,  $(4, 4)$ ,  $(9, 6)$  suggèrent  $y = a\sqrt{x} + b$ . Posez  $z = \sqrt{x}$  et régression.

**Exercice 49** – Inverse [ Correction ]

Pour les données (1, 10), (2, 5), (5, 2), posez  $z = 1/x$  et trouvez la droite.

**Exercice 50** – Inverse en  $y$  [ Correction ]

Les données (1, 1), (2, 0,5), (4, 0,25) suggèrent  $y = a + b/x$ . Vérifiez avec  $z = 1/x$ .

**Exercice 51** – Coût production [ Correction ]

Le coût (euros) en fonction de quantité (unités) : (100, 500), (200, 800), (300, 1100). Modèle linéaire ?

**Exercice 52** – Élasticité [ Correction ]

La demande  $y$ (unités) et le prix  $x$ (euros) : (5, 100), (4, 150), (3, 200). Prédisez pour  $x = 6$ .

**Exercice 53** – Revenu optimal [ Correction ]

Un prix  $x$  donne revenu  $y = x(100 - 2x)$ . Après linéarisation, trouvez le prix optimal.

**Exercice 54** – Économies [ Correction ]

Épargne (euros) selon salaire (euros) : (1500, 150), (2000, 300), (2500, 450). Taux marginal ?

**Exercice 55** – Croissance pop. [ Correction ]

Population (millions) par année :  $y = 10 \cdot 1,02^t$ . Linéarisez et prédisez pour  $t = 10$ .

**Exercice 56** – Radioactivité [ Correction ]

Masse décroît : (0, 100), (10, 80), (20, 64). Modèle exponentiel  $y = Ae^{-\lambda t}$  ?

**Exercice 57** – Refroidissement [ Correction ]

Température passe de 80°C à 20°C en 1 heure. Loi  $y = 20 + 60e^{-kt}$ , trouvez  $k$ .

**Exercice 58** – BAC partie 1 [ Correction ]

Données : (1, 2,5), (2, 5), (3, 10), (4, 20). a) Peut-on modéliser par  $y = a \cdot 2^x$  ? b) Vérifiez.

**Exercice 59** – BAC partie 2 [ Correction ]

Données du 58 : c) Linéarisez avec  $z = \log_2(y)$ . d) Trouvez droite  $z = ax + b$ . e) Prédisez pour  $x = 5$ .

**Exercice 60** – BAC complet [ Correction ]

Dépense annuelle (euros) vs revenu (euros) : (30000, 28000), (40000, 37000), (50000, 46000). a) Droite de régression. b) Coefficient  $r$ . c) Économies pour revenu 60000 euros ?

## Planche 2 – Corrigé

Statistiques à deux variables

Terminale Techno – Chapitre 7

### Correction 31 – Coefficient complet [Énoncé]

$$\bar{x} = 2,5, \bar{y} = 6. V(x) = 1,25, V(y) = 5, \text{Cov}(x, y) = 2,5.$$

$$r = \frac{2,5}{\sqrt{1,25 \cdot 5}} = \frac{2,5}{2,5} = 1$$

### Correction 32 – Pente et ordonnée [Énoncé]

$$a = \frac{\text{Cov}(x,y)}{V(x)} = \frac{2,5}{1,25} = 2. b = \bar{y} - a \cdot \bar{x} = 6 - 2 \cdot 2,5 = 1.$$

Droite :  $y = 2x + 1$ . Vérif :  $y(2,5) = 2(2,5) + 1 = 6 = \bar{y}$

### Correction 33 – Résidus [Énoncé]

$$\hat{y}_1 = 3, e_1 = 0. \hat{y}_2 = 5, e_2 = 0. \hat{y}_3 = 7, e_3 = 0.$$

$$\hat{y}_4 = 9, e_4 = 0. \sum e_i = 0$$

### Correction 34 – Prédiction précise [Énoncé]

$$b = 12,8 - 2,1 \cdot 5,2 = 12,8 - 10,92 = 1,88. \text{ Droite : } y = 2,1x + 1,88.$$

$$\hat{y}(8) = 2,1 \cdot 8 + 1,88 = 16,8 + 1,88 = 18,68.$$

### Correction 35 – Covariance [Énoncé]

$$\bar{x} = 4, \bar{y} = 10. \text{Cov}(x, y) = \frac{1}{3}[(2-4)(5-10) + (4-4)(10-10) + (6-4)(15-10)] = \frac{1}{3}[10 + 0 + 10] = \frac{20}{3} \approx 6,67.$$

$$V(x) = \frac{8}{3}, V(y) = \frac{50}{3}. r = \frac{20/3}{\sqrt{8/3 \cdot 50/3}} = 1$$

### Correction 36 – Deux moyennes [Énoncé]

$$\text{Pente : } a = \frac{8-4}{6-2} = \frac{4}{4} = 1. \text{ Point } (2, 4) : 4 = 1 \cdot 2 + b \Rightarrow b = 2. \text{ Droite : } y = x + 2. \text{ Vérif : } (6, 8) : 8 = 6 + 2$$

### Correction 37 – Vérification moyennes [Énoncé]

$$(2, 4) : y = 1,5(2) + 1 = 4 \quad (6, 10) : y = 1,5(6) + 1 = 10$$

La droite passe par les deux points.

### Correction 38 – Intersection [Énoncé]

$$\text{Moyen : } \bar{x} = 3, \bar{y} = 7. \text{ Droite 1 : } y(3) = 2(3) + 1 = 7$$

$$\text{Droite 2 : } y(3) = -3 + 7 = 4 \quad \square \text{ Seule la droite 1 passe par la moyenne.}$$

### Correction 39 – Alignement [Énoncé]

$$\text{Pente 1-3 : } \frac{5-2}{3-1} = 1,5. \text{ Pente 3-5 : } \frac{8-5}{5-3} = 1,5. \text{ Points alignés avec } a = 1,5. \text{ Droite : } y = 1,5x + 0,5$$

### Correction 40 – Interpolation simple [Énoncé]

$$\hat{y} = 2,5(3,5) - 1 = 8,75 - 1 = 7,75. \text{ Interpolation fiable (dans domaine).}$$

### Correction 41 – Extrapolation critique [Énoncé]

$$\text{Pour } x = 100 : \hat{y} = 1,2(100) + 5 = 125. \text{ Critique : Extrapolation très loin du domaine } [1, 10]. \text{ Tendance peut changer, modèle non fiable.}$$

### Correction 42 – Fiabilité [Énoncé]

$$r = 0,85 \text{ indique corrélation forte mais non parfaite. Prédictions valides dans domaine initial, risquées en extrapolation éloignée.}$$

### Correction 43 – Domaine valide [Énoncé]

Prédictions fiables pour  $x \in [10, 50]$ . Au-delà : risque d'extrapolation abusive.

### Correction 44 – Logarithme [Énoncé]

$$z = \log(y) : (1, \log 2 \approx 0,30), (2, \log 4 \approx 0,60), (4, \log 8 \approx 0,90). \text{ Pente : } a = 0,30. b = 0 \text{ (environ).}$$

$$\text{Droite : } z = 0,30x \text{ ou } y = 10^{0,30x} \approx 2^x.$$

### Correction 45 – Exponentiel [Énoncé]

$$y = e^{0,5x+1}. z = \ln(y) = 0,5x + 1. \text{ Modèle linéaire : } z = 0,5x + 1 \text{ avec } a = 0,5, b = 1.$$

### Correction 46 – Changement variab. [Énoncé]

$$y = 3 \cdot 2^x. \log(y) = \log(3) + x \log(2) = x \log(2) + \log(3).$$

$$a = \log(2) \approx 0,301, b = \log(3) \approx 0,477.$$

### Correction 47 – Prédiction expon. [Énoncé]

$$z(5) = 0,3(5) + 1,5 = 1,5 + 1,5 = 3. \log(y) = 3 \Rightarrow y = 10^3 = 1000.$$

### Correction 48 – Racine carrée [Énoncé]

$$z = \sqrt{x} : (1, 2), (2, 4), (3, 6). \text{ Pente } a = 2, \text{ ordonnée } b = 0. y = 2\sqrt{x}$$

### Correction 49 – Inverse [Énoncé]

$$z = 1/x : (1, 10), (0,5, 5), (0,2, 2). \text{ Relation linéaire :}$$

$$y = 10z. \text{ Droite : } y = 10 \cdot \frac{1}{x} = \frac{10}{x}$$

### Correction 50 – Inverse en y [Énoncé]

$$z = 1/y : (1, 1), (2, 2), (4, 4). \text{ Relation : } z = x. \text{ Droite : } \frac{1}{y} = x \Rightarrow y = \frac{1}{x}$$

### Correction 51 – Coût production [Énoncé]

$$\bar{x} = 200, \bar{y} = 800. \text{ Pentes : } \frac{800-500}{200-100} = 3, \frac{1100-800}{300-200} = 3. \\ a = 3, b = 200. \text{ Droite : } y = 3x + 200 \text{ (linéaire)}$$

### Correction 52 – Élasticité [Énoncé]

$$\bar{x} = 4, \bar{y} = 150. \text{ Pente : } \frac{150-100}{4-5} = -50. b = 150 - (-50)(4) = 350. y = -50x + 350. \text{ Pour } x = 6 : \\ y = -50(6) + 350 = 50 \text{ unités.}$$

### Correction 53 – Revenu optimal [Énoncé]

$$y = x(100-2x) = 100x-2x^2. \text{ Non linéaire. Optimum : } \frac{dy}{dx} = 100 - 4x = 0 \Rightarrow x = 25 \text{ euros.}$$

### Correction 54 – Économies [Énoncé]

$$\text{Pente : } \frac{300-150}{2000-1500} = \frac{150}{500} = 0,3. \text{ Taux marginal : } 30 \text{ centimes par euro gagné. } b = 150 - 0,3(1500) = -300.$$

### Correction 55 – Croissance pop. [Énoncé]

$$y = 10 \cdot 1,02^t. \ln(y) = \ln(10) + t \ln(1,02) \approx 2,30 + 0,0198t. \\ \text{Pour } t = 10 : \ln(y) \approx 2,50 \Rightarrow y \approx 12,2 \text{ millions.}$$

### Correction 56 – Radioactivité [Énoncé]

$$(0, 100), (10, 80), (20, 64). \text{ Rapport : } 80/100 = 0,8, 64/80 = 0,8. \text{ Exponentielle : } y = 100 \cdot 0,8^{t/10} \approx 100e^{-0,0223t}$$

### Correction 57 – Refroidissement [Énoncé]

$$\text{Après 1 heure : } 50 = 20 + 60e^{-k}. 30 = 60e^{-k} \Rightarrow e^{-k} = 0,5. k = \ln(2) \approx 0,693 \text{ h}^{-1}.$$

### Correction 58 – BAC partie 1 [Énoncé]

a) Test :  $2 \cdot 2^1 = 4 \neq 2,5$ . Non simple  $y = a \cdot 2^x$ . b) Mais rapports  $y/y_{i-1}$  sont proches de 2. Modèle exponentiel probable.

### Correction 59 – BAC partie 2 [Énoncé]

c)  $z = \log_2(y) : (1, 1,32), (2, 2,32), (3, 3,32), (4, 4,32)$ . d)  $z = x + 0,32$  (pente 1). e) Pour  $x = 5 : z = 5,32 \Rightarrow y = 2^{5,32} \approx 40,4$ .

### Correction 60 – BAC complet [Énoncé]

a)  $\bar{x} = 40000, \bar{y} = 37000$ . Pente :  $a = \frac{9000}{10000} = 0,9$ . Droite :  $y = 0,9x + 1000$ . b)  $r = 1$  (données alignées). c) Pour revenu 60000 :  $y = 0,9(60000) + 1000 = 55000$  euros dépensés, économies = 5000 euros.