

Planche d'exercices n°1

Statistiques à deux variables
Terminale Techno – Chapitre 7

Exercice 1 – Lire une série [Correction]

Le tableau suivant donne le prix en euros et la puissance en kW de différents moteurs :

Puissance (x)	5	10	15	20	25
Prix (y)	200	380	560	750	920

Listez les cinq couples de points (x_i, y_i) .

Exercice 2 – Couples et série [Correction]

On relève les salaires mensuels (en euros) et l'ancienneté (en années) de 4 employés :

Ancienneté (x)	1	3	5	8
Salaire (y)	1800	2100	2500	3200

Écrivez la série statistique à deux variables.

Exercice 3 – Nuage de points [Correction]

Tracez le nuage de points pour les données :

x	2	4	6	8	10
y	3	7	11	15	19

Exercice 4 – Interprétation graphique [Correction]

À partir d'un nuage de points, comment déterminez-vous s'il existe une corrélation linéaire entre deux variables ?

Exercice 5 – Série incomplète [Correction]

Complétez le tableau sachant que les 6 couples sont : (1, 2), (2, 5), (3, 7), (4, 10), (5, 12), (6, 15).

x	1	2	3	4	5	6
y						

Exercice 6 – Calcul du point moyen [Correction]

Calculez les coordonnées du point moyen $G(\bar{x}, \bar{y})$ pour la série :

x	1	2	3	4
y	2	4	5	8

Exercice 7 – Point moyen 2 [Correction]

Déterminez $G(\bar{x}, \bar{y})$ pour :

x	10	15	20	25	30
y	50	70	85	95	110

Exercice 8 – Point moyen 3 [Correction]

Soit la série : (3, 7), (6, 11), (9, 18), (12, 24). Calculez \bar{x} et \bar{y} .

Exercice 9 – Vérification moyen [Correction]

Le point moyen est $G(5, 8)$. Parmi les séries suivantes, laquelle donne ce point moyen ?

1. (2, 4), (5, 8), (8, 12)
2. (1, 5), (5, 8), (9, 11)
3. (3, 6), (5, 8), (7, 10)

Exercice 10 – Centre de masse [Correction]

Représentez le nuage et le point moyen pour :

x	2	4	6
y	3	5	7

Exercice 11 – Droite d'ajustement [Correction]

Pour la série :

x	1	2	3	4
y	3	5	7	9

Déterminez l'équation de la droite d'ajustement $y = ax + b$ par moindres carrés.

Exercice 12 – Moindres carrés [Correction]

Pour la série :

x	2	4	6	8
y	10	18	28	38

Trouvez a et b de la droite de régression.

Exercice 13 – Calcul de a [Correction]

Sachant que $\bar{x} = 2.5$, $\bar{y} = 6$ et $\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 10$, calculez a si $\sum(x_i - \bar{x})^2 = 5$.

Exercice 14 – Vérification droite [Correction]

Vérifiez que la droite $y = 2x + 1$ passe par le point moyen $G(3, 7)$.

Exercice 15 – Méthode des points moyens [Correction]

Divisez la série en deux groupes et calculez les points moyens G_1 et G_2 :

x	1	2	3	4	5	6
y	2	3	5	6	8	9

Exercice 16 – Points moyens G_1 et G_2 [Correction]

Pour $G_1(1, 2)$ et $G_2(5, 8)$, déterminez l'équation de la droite passant par ces deux points.

Exercice 17 – Droite par deux points [Correction]

Trouvez l'équation de la droite passant par $G_1(2, 4)$ et $G_2(6, 12)$.

Exercice 18 – Validation méthode [Correction]

Comparez la droite obtenue par moindres carrés et celle obtenue par la méthode des points moyens pour une même série.

Exercice 19 – Interpolation [Correction]

La droite de régression est $y = 3x + 2$. Estimez y pour $x = 4.5$. Est-ce une interpolation ou extrapolation ?

Exercice 20 – Extrapolation [Correction]

La série couvre $x \in [10, 30]$. Estimez y pour $x = 50$ avec la droite $y = 2x - 5$. Justifiez.

Exercice 21 – Distinction [Correction]

Classez chaque estimation comme interpolation ou extrapolation :

- Données : $x \in [1, 10]$, estimer pour $x = 5$
- Données : $x \in [1, 10]$, estimer pour $x = 15$
- Données : $x \in [20, 40]$, estimer pour $x = 35$

Exercice 22 – Estimation y [Correction]

La droite de régression est $y = 1.5x + 10$. Estimez y pour $x = 8$.

Exercice 23 – Estimation x [Correction]

Avec $y = 2x + 3$, pour quelle valeur de x a-t-on $y = 13$?

Exercice 24 – Prévion [Correction]

Un magasin suit le nombre de clients (x) et le chiffre d'affaires en euros (y) :

Clients (x)	100	150	200	250
CA (y)	5000	7500	10000	12500

Estimez le CA pour 300 clients.

Exercice 25 – Prévion inverse [Correction]

Avec la même droite, pour quel nombre de clients le CA sera-t-il 15000 euros ?

Exercice 26 – Changement de variable [Correction] Quel modèle choisiriez-vous ? Justifiez.

Transformez $y = e^{kx}$ en posant $z = \ln(y)$. Décrivez la nouvelle relation.

Exercice 27 – Racine carrée [Correction]

Transformez la série en posant $z = \sqrt{y}$:

x	1	4	9	16
y	1	4	9	16

Exercice 28 – Logarithme [Correction]

Appliquez $z = \log_{10}(y)$ à la série :

x	1	2	3
y	10	100	1000

Exercice 29 – Croissance économique [Correction]

Le PIB d'un pays (en milliards d'euros) suit la croissance :

Année	2018	2019	2020	2021
PIB	2000	2150	2100	2300

Trouvez la droite de régression (avec $x =$ années depuis 2018).

Exercice 30 – Population croissante [Correction]

Une population bactérienne suit :

Temps (h)	0	1	2	3	4
Pop. (milliers)	2	4	8	16	32

PLANCHE D'EXERCICES N°1

Statistiques à deux variables

Correction 1 – Lire une série [Énoncé]

Les cinq couples (x_i, y_i) sont :

1. (5, 200)
2. (10, 380)
3. (15, 560)
4. (20, 750)
5. (25, 920)

Correction 2 – Couples et série [Énoncé]

La série statistique à deux variables est :

$$\{(1, 1800); (3, 2100); (5, 2500); (8, 3200)\}$$

Nous avons $n = 4$ couples de points.

Correction 3 – Nuage de points [Énoncé]

Les points (2, 3), (4, 7), (6, 11), (8, 15), (10, 19) forment un nuage pratiquement aligné. On remarque une très forte corrélation linéaire positive.

Correction 4 – Interprétation graphique [Énoncé]

On regarde si les points se concentrent autour d'une droite imaginaire. Si oui, il existe une corrélation linéaire (positive si la tendance est croissante, négative si décroissante). Plus les points sont proches d'une droite, plus la corrélation est forte.

Correction 5 – Série incomplète [Énoncé]

x	1	2	3	4	5	6
y	2	5	7	10	12	15

Correction 6 – Calcul du point moyen [Énoncé]

$$\bar{x} = \frac{1 + 2 + 3 + 4}{4} = \frac{10}{4} = 2.5$$

$$\bar{y} = \frac{2 + 4 + 5 + 8}{4} = \frac{19}{4} = 4.75$$

Le point moyen est $G(2.5; 4.75)$.

Correction 7 – Point moyen 2 [Énoncé]

$$\bar{x} = \frac{10 + 15 + 20 + 25 + 30}{5} = \frac{100}{5} = 20$$

$$\bar{y} = \frac{50 + 70 + 85 + 95 + 110}{5} = \frac{410}{5} = 82$$

Le point moyen est $G(20; 82)$.

Correction 8 – Point moyen 3 [Énoncé]

$$\bar{x} = \frac{3 + 6 + 9 + 12}{4} = \frac{30}{4} = 7.5$$

$$\bar{y} = \frac{7 + 11 + 18 + 24}{4} = \frac{60}{4} = 15$$

Le point moyen est $G(7.5; 15)$.

Correction 9 – Vérification moyen [Énoncé]

Réponse : c)

Vérification :

$$1. \bar{x} = 5, \bar{y} = \frac{6+8+10}{3} = 8 \text{ (correcte)}$$

$$2. \bar{x} = 5, \bar{y} = \frac{5+8+11}{3} = 8 \text{ (correcte)}$$

$$3. \bar{x} = 5, \bar{y} = \frac{6+8+10}{3} = 8 \text{ (correcte)}$$

En fait, les trois séries donnent le même point moyen ! La réponse c) est un exemple classique.

Correction 10 – Centre de masse [Énoncé]

$$\bar{x} = \frac{2 + 4 + 6}{3} = 4, \quad \bar{y} = \frac{3 + 5 + 7}{3} = 5$$

Le point moyen $G(4; 5)$ se situe au centre du nuage formé par les trois points alignés.

Correction 11 – Droite d'ajustement [Énoncé]

Les données sont parfaitement alignées. On calcule :

$$\bar{x} = 2.5, \quad \bar{y} = 6$$

$$\sum (x_i - \bar{x})^2 = 2.5, \quad \sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 5$$

$$a = \frac{5}{2.5} = 2, \quad b = 6 - 2 \times 2.5 = 1$$

L'équation est $y = 2x + 1$.

Correction 12 – Moindres carrés [Énoncé]

$$\bar{x} = \frac{2 + 4 + 6 + 8}{4} = 5, \quad \bar{y} = \frac{10 + 18 + 28 + 38}{4} = 23.5$$

$$\sum (x_i - \bar{x})^2 = 9 + 1 + 1 + 9 = 20$$

$$\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 3(-13.5) + (-1)(-5.5) + 1(4.5) + 3(14.5) = 40$$

$$a = \frac{40}{20} = 2, \quad b = 23.5 - 2 \times 5 = 13.5$$

L'équation est $y = 2x + 13.5$.

Correction 13 – Calcul de a [Énoncé]

Par définition du coefficient de régression :

$$a = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum(x_i - \bar{x})^2} = \frac{10}{5} = 2$$

Correction 14 – Vérification droite [Énoncé]

On substitue $x = 3$ dans $y = 2x + 1$:

$$y = 2(3) + 1 = 7$$

Le point $(3, 7)$ vérifie l'équation. La droite passe bien par $G(3; 7)$.

Correction 15 – Méthode des points moyens [Énoncé]

Première moitié : $(1, 2), (2, 3), (3, 5) \Rightarrow G_1(2; 3.33)$

Deuxième moitié : $(4, 6), (5, 8), (6, 9) \Rightarrow G_2(5; 7.67)$

Coordonnées exactes :

$$G_1\left(2; \frac{10}{3}\right), \quad G_2\left(5; \frac{23}{3}\right)$$

Correction 16 – Points moyens G_1 et G_2 [Énoncé]

Pente :

$$a = \frac{8 - 2}{5 - 1} = \frac{6}{4} = 1.5$$

En utilisant $G_1(1, 2)$:

$$2 = 1.5(1) + b \Rightarrow b = 0.5$$

L'équation est $y = 1.5x + 0.5$.

Correction 17 – Droite par deux points [Énoncé]

Pente :

$$a = \frac{12 - 4}{6 - 2} = \frac{8}{4} = 2$$

En utilisant $G_1(2, 4)$:

$$4 = 2(2) + b \Rightarrow b = 0$$

L'équation est $y = 2x$.

Correction 18 – Validation méthode [Énoncé]

Pour une série sans erreurs de mesure, les deux méthodes donnent exactement le même résultat. Pour une série avec dispersion, les résultats diffèrent légèrement. La méthode des moindres carrés est généralement préférée car elle minimise les erreurs résiduelles.

Correction 19 – Estimation y [Énoncé]

Pour $x = 4.5$:

$$y = 3(4.5) + 2 = 13.5 + 2 = 15.5$$

C'est une interpolation car 4.5 est entre deux valeurs observées dans la série.

Correction 20 – Extrapolation [Énoncé]

Pour $x = 50$:

$$y = 2(50) - 5 = 100 - 5 = 95$$

C'est une extrapolation car $50 > 30$ (limite supérieure de la série). Cette estimation est moins fiable car on sort de la plage de données observées.

Correction 21 – Distinction [Énoncé]

1. $x = 5$ avec données $[1, 10]$: **Interpolation**
2. $x = 15$ avec données $[1, 10]$: **Extrapolation**
3. $x = 35$ avec données $[20, 40]$: **Interpolation**

Correction 22 – Estimation y [Énoncé]

Pour $x = 8$:

$$y = 1.5(8) + 10 = 12 + 10 = 22$$

Correction 23 – Estimation x [Énoncé]

On résout $2x + 3 = 13$:

$$2x = 10 \Rightarrow x = 5$$

Correction 24 – Prévion [Énoncé]

Calcul de la droite. $\bar{x} = 175, \bar{y} = 8750$.

$$a = \frac{(100 - 175)(-3750) + (150 - 175)(-1250) + (200 - 175)(1250)}{4 \times 2500}$$

Donc $y = 50x$.

Pour 300 clients : $y = 50(300) = 15000$ euros.

Correction 25 – Prévion inverse [Énoncé]

Avec $y = 50x$, on résout $50x = 15000$:

$$x = 300 \text{ clients}$$

Correction 26 – Changement de variable [Énoncé]

Si $y = e^{kx}$, alors $\ln(y) = kx$.

En posant $z = \ln(y)$, on obtient $z = kx$, qui est une relation linéaire. La régression linéaire sur (x, z) permet de retrouver $k = a$.

Correction 27 – Racine carrée [Énoncé]

Transformation $z = \sqrt{y}$:

x	1	4	9	16
$z = \sqrt{y}$	1	2	3	4

Les points (x, z) sont alignés : $z = 0.25x$, soit $\sqrt{y} = 0.25x$.

Correction 28 – Logarithme [Énoncé]

Transformation $z = \log_{10}(y)$:

x	1	2	3
$z = \log_{10}(y)$	1	2	3

Les points sont alignés : $z = x$, soit $\log_{10}(y) = x$ ou $y = 10^x$.

Correction 29 – Croissance économique [Énoncé]

Avec $x = 0, 1, 2, 3$ (années depuis 2018), on obtient :

$$\bar{x} = 1.5, \quad \bar{y} = 2137.5$$

$$a \approx 75, \quad b \approx 2075$$

L'équation est approximativement $y = 75x + 2075$.

PIB prévu en 2022 ($x = 4$) : $y = 75(4) + 2075 = 2375$ milliards.

Correction 30 – Population croissante [Énoncé]

La population double à chaque heure ($2 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow 16 \rightarrow 32$). C'est une croissance exponentielle, pas linéaire.

Modèle choisi : $P = 2 \cdot 2^t$ (ou $P = 2^{t+1}$) où t est le temps en heures.

Justification : Un modèle linéaire serait inapproprié.

On peut transformer avec $z = \log_2(P)$ pour obtenir une relation linéaire : $z = 1 + t$.