Planche 1 — Variables aléatoires et loi binomiale

Terminale Techno • Chapitre 6 • 30 exercices

Cliquer sur [Correction] pour accéder directement au corrigé.

I Loi de probabilité et espérance

Exercice 1 — Loi donnée par tableau [Correction]

Soit X la variable aléatoire dont la loi est donnée par :

x_i	0	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	0,2	0,01	0,4	a	0,09

1) Déterminer la valeur de a.
2) Calculer $E(X)$.

Exercice 2 — Loi et espérance — jeu de dés [Correction]

On lance deux dés à 6 faces numérotés de 1 à 6. X est la différence du résultat du dé n°1 avec celui du dé n°2.

1) Compléter le tableau à double entrée des résultats.
2) Donner les valeurs prises par X.
3) Dresser la loi de probabilité de X.
4) Calculer $E(X)$.

Exercice 3 — Urne et espérance [Correction]

Une urne contient 6 boules blanches et 4 boules rouges. On tire trois fois avec remise. Pour chaque partie :

— 3 boules rouges → gain 100 €
— exactement 2 rouges → gain 15 €
— autres cas → gain 0 €

X = gain du joueur.

1) Montrer que $P(X = 100) = 0{,}064$.
2) Déterminer la loi de probabilité de X.
3) Montrer que $E(X) = 10{,}72$.
4) Le joueur paie 10 € par partie. Ce jeu est-il favorable ?

Exercice 4 — Variable aléatoire — tableau lacunaire [Correction]

X prend les valeurs -2, 0, 3, 5, avec : $P(X = -2) = 0{,}3$, $P(X = 0) = ?$, $P(X = 3) = 0{,}2$, $P(X = 5) = 0{,}1$.

1) Trouver la probabilité manquante.
2) Calculer $E(X)$ et interpréter.

Exercice 5 — Pannes hebdomadaires [Correction]

X = nombre de pannes d'une machine par semaine.

k	0	1	2	3
$P(X = k)$	0,5	0,3	0,15	0,05

1) Vérifier que c'est une loi de probabilité.
2) Calculer $E(X)$ et interpréter.

Exercice 6 — Espérance — valeur inconnue [Correction]

X prend les valeurs 2, 3 et a (a réel) avec : $P(X = 2) = \frac{1}{2}$, $P(X = 3) = \frac{1}{3}$, $P(X = a) = \frac{1}{6}$. On sait que $E(X) = 4$. Déterminer a.

Exercice 7 — Comparaison de jeux [Correction]

Jeu A : pièce équilibrée, face → +3 €, pile → −1 €. Jeu B : dé équilibré, multiple de 3 → +4 €, sinon → −1 €.

1) Calculer $E(X_A)$ et $E(X_B)$.
2) Quel jeu est le plus avantageux ?

Exercice 8 — QCM — espérance [Correction]

Un QCM comporte 10 questions avec 5 réponses possibles dont une seule exacte. Enzo répond au hasard. Z = nombre de bonnes réponses.

1) Montrer que $Z \sim B(10, \frac{1}{5})$.
2) Calculer $E(Z)$. Interpréter.

II Coefficients binomiaux

Exercice 9 — Triangle de Pascal [Correction]

À l'aide du triangle de Pascal, déterminer : $\binom{5}{0}$, $\binom{5}{1}$, $\binom{5}{2}$, $\binom{5}{3}$, $\binom{5}{4}$, $\binom{5}{5}$.

Exercice 10 — Propriétés [Correction]

1) Calculer $\binom{6}{2}$, $\binom{7}{5}$, $\binom{10}{0}$, $\binom{5}{3}$.
2) Vérifier la symétrie : $\binom{9}{7} = \binom{9}{2}$.

3) Vérifier Pascal : $\binom{7}{3} = \binom{6}{2} + \binom{6}{3}$.

Exercice 11 — Calcul et formule **[Correction]**

1) Calculer $\binom{4}{2} + \binom{4}{3}$. Vérifier que c'est égal à $\binom{5}{3}$.

2) Calculer $\sum_{k=0}^{6} \binom{6}{k}$. Que remarque-t-on ?

III Loi binomiale

Exercice 12 — Feux piétons **[Correction]**

Un piéton rencontre 3 feux piétons indépendants. Chaque feu est rouge 45 s puis vert 15 s. $p = P(\text{feu vert}) = \frac{1}{4}$. X = nombre de feux verts rencontrés.

1) Identifier la loi de X.

2) Dresser la loi de probabilité de X.

3) Calculer $E(X)$. Interpréter.

4) Le piéton arrive en retard s'il rencontre au moins 2 feux rouges. Calculer cette probabilité.

Exercice 13 — Urne — loi binomiale **[Correction]**

Urne : 3 boules rouges, 6 boules blanches. On tire 2 fois avec remise. X = nombre de boules rouges.

1) Identifier la loi de X et ses paramètres.

2) Dresser la loi de probabilité de X.

3) Calculer $E(X)$ de deux façons.

Exercice 14 — $Y \sim B(5, \frac{1}{5})$ **[Correction]**

Y suit la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = \frac{1}{5}$.

1) Calculer $P(Y = 0)$, $P(Y = 5)$, $P(Y = 3)$.

2) Calculer $P(Y \geq 2)$.

3) Calculer $E(Y)$ de deux façons.

Exercice 15 — Naissances **[Correction]**

À la naissance, $P(\text{fille}) = 0{,}51$. On choisit 3 enfants nés indépendamment. X = nombre de filles.

1) Représenter par un arbre pondéré.

2) Identifier la loi de X.

3) Dresser la loi de X.

4) Calculer $E(X)$. Interpréter.

Exercice 16 — Cyclistes **[Correction]**

30% des cyclistes d'un club décident de s'équiper si l'air est mauvais. On choisit 4 cyclistes au hasard. X = nb qui s'équipent.

1) Identifier la loi de X.

2) $P(X = 2)$.

3) $P(X \geq 1)$.

4) $P(X \leq 2)$.

Exercice 17 — Retrouver p **[Correction]**

$X \sim B(3, p)$ et $P(X = 3) = 0{,}125$.

1) Montrer que $p^3 = 0{,}125$.

2) En déduire p et la loi de X.

3) Calculer $P(X \leq 2)$.

Exercice 18 — Dé tétraédrique **[Correction]**

Dé tétraédrique : 1 face bleue, 2 faces rouges, 1 face verte. E : « les deux faces notées sont vertes ». F : « les deux faces notées sont de même couleur ». On joue 2 parties.

1) Calculer $P(E)$, $P(F)$ et $P_F(E)$.

2) On joue 6 parties. Calculer P(F au moins 2 fois).

IV Calculatrice et problèmes

Exercice 19 — $B(10, 0{,}3)$ à la calculatrice **[Correction]**

$X \sim B(10, 0{,}3)$.

1) Calculer $P(X = 4)$, $P(X \leq 3)$, $P(X \geq 5)$.

2) Calculer $E(X)$.

Exercice 20 — Contrôle qualité **[Correction]**

5% des pièces d'une usine sont défectueuses. On prélève 20 pièces. X = nombre de défectueuses.

1) Loi de X.

2) Calculer $P(X = 0)$, $P(X = 1)$, $P(X \geq 2)$.

3) Calculer $E(X)$. Interpréter.

Exercice 21 — Traitement médical **[Correction]**

Un médicament guérit 80% des patients. On traite 10 patients. X = nombre de guérisons.

1) Loi de X et $E(X)$.

2) Calculer $P(X = 10)$ et $P(X = 8)$.

3) Calculer $P(X \geq 9)$.

Exercice 22 — Sondage **[Correction]**

30% des Français préfèrent le thé au café. On interroge 25 personnes. X = nombre préférant le thé.

1) Loi de X.

2) Calculer $P(X \leq 5)$ et $P(X \geq 10)$.

3) $E(X)$. Interpréter.

Exercice 23 — Diagramme en bâtons **[Correction]**

$X \sim B(4, 0{,}5)$.

1) Calculer $P(X = k)$ pour $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

2) Tracer le diagramme en bâtons.

3) Calculer $E(X)$. Sur quel axe de symétrie ?

Exercice 24 — Tirs au but **[Correction]**

Un joueur réussit ses tirs au but avec $p = 0{,}7$. Il effectue

8 tirs. X = nombre réussis.

1) $E(X)$.
2) $P(X \geq 6)$.
3) $P(X = 4)$.

Exercice 25 — Probabilité seuil [Correction]

$X \sim B(n, 0{,}5)$. On cherche le plus petit n tel que $P(X \geq 1) \geq 0{,}99$.

1) Exprimer $P(X \geq 1)$ en fonction de n.
2) Résoudre $(0{,}5)^n \leq 0{,}01$.
3) Conclure.

V Problèmes contextualisés

Exercice 26 — Jeu de l'urne modifié [Correction]

L'organisateur de l'exercice 3 envisage deux solutions pour rendre le jeu moins favorable au joueur :

- Solution 1 : augmenter le prix de 3 € (passer à 13 €) ;
- Solution 2 : diminuer chaque gain de 3 € (prix reste 10 €).

Quelle solution est la plus rentable pour l'organisateur ?

Exercice 27 — QCM à 4 choix [Correction]

Un QCM a 10 questions à 4 choix. On répond au hasard. Bonne réponse +2 pts, mauvaise −0,5 pt.

1) Espérance d'une question.
2) Espérance de la note totale.

Exercice 28 — $B(8, 0{,}25)$ [Correction]

$X \sim B(8, 0{,}25)$.

1) Calculer $P(X = 3)$ avec la formule.
2) Calculer $P(X \leq 4)$ à la calculatrice.
3) Calculer $E(X)$.

Exercice 29 — $B(12, \frac{1}{4})$ — synthèse [Correction]

$X \sim B(12, \frac{1}{4})$.

1) Calculer $E(X)$.
2) Calculer $P(X = 3)$ avec la formule.
3) Calculer $P(X \leq 3)$ à la calculatrice.
4) Calculer $P(X \geq 5)$.

Exercice 30 — Problème — maternité [Correction]

Dans une maternité, $P(\text{fille}) = 0{,}51$. On choisit 20 naissances indépendantes. X = nombre de filles.

1) Loi de X et $E(X)$.
2) Calculer $P(X = 10)$.
3) Calculer $P(X \geq 12)$.
4) Calculer $P(8 \leq X \leq 12)$.

Rappels : $E(X) = \sum x_i P(X = x_i)$ $\quad P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ $\quad E(X) = np$ pour $B(n, p)$ $\quad P(X \geq k) = 1 - P(X \leq k-1)$ $\quad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

Corrigé — Planche 1 — Ch.6

Terminale Techno • 30 exercices

Correction 1 — Loi donnée par tableau [Énoncé]

1. $\sum p_i = 1 \Rightarrow 0{,}2 + 0{,}01 + 0{,}4 + a + 0{,}09 = 1 \Rightarrow 0{,}7 + a = 1 \Rightarrow \boxed{a = 0{,}3}$.

2. $E(X) = 0 \times 0{,}2 + 1 \times 0{,}01 + 2 \times 0{,}4 + 3 \times 0{,}3 + 4 \times 0{,}09 = 0 + 0{,}01 + 0{,}8 + 0{,}9 + 0{,}36 = \boxed{2{,}07}$.

Correction 2 — Jeu de dés [Énoncé]

1. Tableau 6×6 : case (i, j) vaut $i - j$.

2. X prend les valeurs $-5, -4, \dots, 4, 5$.

3. Par symétrie : $P(X = 0) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$; $P(X = \pm 1) = \frac{5}{36}$; $P(X = \pm 2) = \frac{4}{36}$; $P(X = \pm 3) = \frac{3}{36}$; $P(X = \pm 4) = \frac{2}{36}$; $P(X = \pm 5) = \frac{1}{36}$.

4. Par symétrie $\boxed{E(X) = 0}$ (jeu équitable).

Correction 3 — Urne — gain [Énoncé]

$p = P(\text{rouge}) = 0{,}4$, $n = 3$, $X \sim \mathcal{B}(3, 0{,}4)$.

1. $P(X = 3) = (0{,}4)^3 = 0{,}064$ ⊠

2. $P(X = 2) = \binom{3}{2}(0{,}4)^2(0{,}6) = 3 \times 0{,}16 \times 0{,}6 = 0{,}288$. $P(X = 0 \text{ ou } 1) = 1 - 0{,}064 - 0{,}288 = 0{,}648$.

x_i	0	15	100
P	0,648	0,288	0,064

3. $E(X) = 0 \times 0{,}648 + 15 \times 0{,}288 + 100 \times 0{,}064 = 0 + 4{,}32 + 6{,}4 = \boxed{10{,}72}$ ⊠

4. $E(X) = 10{,}72 > 10$: le jeu est **favorable au joueur**.

Correction 4 — Tableau lacunaire [Énoncé]

1. $p_{manq} = 1 - 0{,}3 - 0{,}2 - 0{,}1 = \boxed{0{,}4}$.

2. $E(X) = (-2)(0{,}3) + 0(0{,}4) + 3(0{,}2) + 5(0{,}1) = -0{,}6 + 0 + 0{,}6 + 0{,}5 = \boxed{0{,}5}$. En moyenne, le gain vaut 0,5 €.

Correction 5 — Pannes [Énoncé]

1. $0{,}5 + 0{,}3 + 0{,}15 + 0{,}05 = 1{,}00$ ⊠

2. $E(X) = 0(0{,}5) + 1(0{,}3) + 2(0{,}15) + 3(0{,}05) = 0 + 0{,}3 + 0{,}30 + 0{,}15 = \boxed{0{,}75}$. En moyenne, 0,75 panne par semaine.

Correction 6 — Valeur inconnue a [Énoncé]

$E(X) = 4 \Rightarrow 2 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{3} + a \times \frac{1}{6} = 4 \Rightarrow 1 + 1 + \frac{a}{6} = 4 \Rightarrow \frac{a}{6} = 2 \Rightarrow \boxed{a = 12}$.

Correction 7 — Comparaison de jeux [Énoncé]

$E(X_A) = \frac{1}{2} \times 3 + \frac{1}{2} \times (-1) = \frac{3-1}{2} = \boxed{1}$ €.

$E(X_B) = \frac{2}{6} \times 4 + \frac{4}{6} \times (-1) = \frac{8-4}{6} = \frac{4}{6} \approx \boxed{0{,}67}$ €.

Jeu A plus avantageux.

Correction 8 — QCM [Énoncé]

1. 10 questions identiques et indépendantes, succès = bonne réponse, $p = \frac{1}{5}$. Donc $Z \sim \mathcal{B}\left(10, \frac{1}{5}\right)$ ⊠

2. $E(Z) = 10 \times \frac{1}{5} = \boxed{2}$. En moyenne, Enzo obtient seulement 2 bonnes réponses sur 10.

Correction 9 — Triangle de Pascal [Énoncé]

$\binom{5}{0} = 1$, $\binom{5}{1} = 5$, $\binom{5}{2} = 10$, $\binom{5}{3} = 10$, $\binom{5}{4} = 5$, $\binom{5}{5} = 1$.

On lit la ligne $n = 5$ du triangle : 1, 5, 10, 10, 5, 1.

Correction 10 — Propriétés [Énoncé]

1. $\binom{6}{2} = 15$; $\binom{7}{5} = 21$; $\binom{10}{0} = 1$; $\binom{5}{3} = 10$.

2. $\binom{9}{7} = \binom{9}{2} = \frac{9 \times 8}{2} = 36$ ⊠(symétrie).

3. $\binom{6}{2} + \binom{6}{3} = 15 + 20 = 35 = \binom{7}{3}$ ⊠

Correction 11 — Calcul et formule [Énoncé]

1. $\binom{4}{2} + \binom{4}{3} = 6 + 4 = 10 = \binom{5}{3}$ ⊠(Pascal)

2. $\sum_{k=0}^{6} \binom{6}{k} = 1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 64 = 2^6$. *Remarque :* $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

Correction 12 — Feux piétons [Énoncé]

$X \sim \mathcal{B}\left(3, \frac{1}{4}\right)$, $p = \frac{1}{4}$, $q = \frac{3}{4}$.

2. $P(X = 0) = \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64}$; $P(X = 1) = 3 \times \frac{1}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{27}{64}$; $P(X = 2) = 3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \frac{3}{4} = \frac{9}{64}$; $P(X = 3) = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$.

3. $E(X) = 3 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0{,}75$. En moyenne, 0,75 feu vert par trajet.

4. Retard $\Leftrightarrow$ au moins 2 feux rouges $\Leftrightarrow X \leq 1$. $P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{27}{64} + \frac{27}{64} = \frac{54}{64} = \frac{27}{32} \approx \boxed{0{,}844}$.

Correction 13 — Urne — loi binomiale [Énoncé]

1. $X \sim \mathcal{B}\left(2, \frac{1}{3}\right)$: $n = 2$ tirages avec remise, $p = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

2. $P(X = 0) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$; $P(X = 1) = 2 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$; $P(X = 2) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$. Somme $= \frac{9}{9} = 1$ ⊠

3. Par tableau : $E(X) = 0 \times \frac{4}{9} + 1 \times \frac{4}{9} + 2 \times \frac{1}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$. Par formule : $E(X) = 2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ ⊠

Correction 14 — $Y \sim B(5, \frac{1}{5})$ [Énoncé]

1. $P(Y=0) = \left(\frac{4}{5}\right)^5 = \frac{1024}{3125}$. $P(Y=5) = \left(\frac{1}{5}\right)^5 = \frac{1}{3125}$. $P(Y=3) = \binom{5}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^3\left(\frac{4}{5}\right)^2 = 10 \times \frac{1}{125} \times \frac{16}{25} = \frac{32}{625}$.
2. $P(Y \geq 2) = 1 - P(Y \leq 1) = 1 - P(Y=0) - P(Y=1)$. $P(Y=1) = 5 \times \frac{1}{5} \times \left(\frac{4}{5}\right)^4 = \frac{256}{625}$. $P(Y \geq 2) = 1 - \frac{1024}{3125} - \frac{256}{625} = 1 - \frac{1024+1280}{3125} = \frac{821}{3125} \approx 0{,}263$.
3. Par tableau : $E(Y) = \sum k\,P(Y=k) = 1$. Par formule : $E(Y) = 5 \times \frac{1}{5} = \boxed{1}$ ☒

Correction 15 — Naissances [Énoncé]

2. $X \sim B(3, 0{,}51)$.
3. $P(X=0) = (0{,}49)^3 \approx 0{,}1176$. $P(X=1) = 3(0{,}51)(0{,}49)^2 \approx 0{,}3674$. $P(X=2) = 3(0{,}51)^2(0{,}49) \approx 0{,}3823$. $P(X=3) = (0{,}51)^3 \approx 0{,}1327$.
4. $E(X) = 3 \times 0{,}51 = \boxed{1{,}53}$. En moyenne, 1,53 fille (soit environ 2) parmi 3 enfants.

Correction 16 — Cyclistes [Énoncé]

$X \sim B(4, 0{,}3)$, $q = 0{,}7$.
2. $P(X=2) = \binom{4}{2}(0{,}3)^2(0{,}7)^2 = 6 \times 0{,}09 \times 0{,}49 = \boxed{0{,}2646}$.
3. $P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - (0{,}7)^4 = 1 - 0{,}2401 = \boxed{0{,}7599}$.
4. $P(X \leq 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = (0{,}7)^4 + 4(0{,}3)(0{,}7)^3 + 0{,}2646 = 0{,}2401 + 0{,}4116 + 0{,}2646 = \boxed{0{,}9163}$.

Correction 17 — Retrouver p [Énoncé]

1. $P(X=3) = \binom{3}{3}p^3(1-p)^0 = p^3$. $p^3 = 0{,}125$ ☒
2. $p = \sqrt[3]{0{,}125} = 0{,}5$. Donc $X \sim B(3, 0{,}5)$.
3. $P(X \leq 2) = 1 - P(X=3) = 1 - 0{,}125 = \boxed{0{,}875}$.

Correction 18 — Dé tétraédrique [Énoncé]

$P(B) = \frac{1}{4}$, $P(R) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, $P(V) = \frac{1}{4}$.
1. $P(E) = P(V) \times P(V) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$. $P(F) = P(B)^2 + P(R)^2 + P(V)^2 = \frac{1}{16} + \frac{4}{16} + \frac{1}{16} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$. $P_F(E) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{P(E)}{P(F)} = \frac{1/16}{3/8} = \frac{1}{16} \times \frac{8}{3} = \frac{1}{6}$.

2. Y = nb de fois où F se réalise sur 6 parties. $Y \sim B\left(6, \frac{3}{8}\right)$. $P(Y \geq 2) = 1 - P(Y \leq 1) = 1 - P(Y=0) - P(Y=1)$. $P(Y=0) = \left(\frac{5}{8}\right)^6 \approx 0{,}0578$. $P(Y=1) = 6 \times \frac{3}{8} \times \left(\frac{5}{8}\right)^5 \approx 0{,}2086$. $P(Y \geq 2) \approx 1 - 0{,}0578 - 0{,}2086 \approx \boxed{0{,}734}$.

Correction 19 — $B(10, 0{,}3)$ [Énoncé]

$P(X=4) = \binom{10}{4}(0{,}3)^4(0{,}7)^6 \approx \boxed{0{,}200}$.

$P(X \leq 3) \approx \boxed{0{,}650}$ (calculatrice : `binomcdf(10,0.3,3)`).

$P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4) \approx 1 - 0{,}850 = \boxed{0{,}150}$.

$E(X) = 10 \times 0{,}3 = \boxed{3}$.

Correction 20 — Contrôle qualité [Énoncé]

$X \sim B(20, 0{,}05)$.
$P(X=0) = (0{,}95)^{20} \approx \boxed{0{,}358}$.

$P(X=1) = 20 \times 0{,}05 \times (0{,}95)^{19} \approx \boxed{0{,}377}$.

$P(X \geq 2) = 1 - P(X=0) - P(X=1) \approx 1 - 0{,}735 = \boxed{0{,}265}$.

$E(X) = 20 \times 0{,}05 = \boxed{1}$ pièce défectueuse en moyenne.

Correction 21 — Traitement médical [Énoncé]

$X \sim B(10, 0{,}8)$. $E(X) = 10 \times 0{,}8 = \boxed{8}$.

$P(X=10) = (0{,}8)^{10} \approx \boxed{0{,}107}$.

$P(X=8) = \binom{10}{8}(0{,}8)^8(0{,}2)^2 = 45 \times 0{,}1678 \times 0{,}04 \approx \boxed{0{,}302}$.
$P(X \geq 9) = P(X=9) + P(X=10)$. $P(X=9) = 10(0{,}8)^9(0{,}2) \approx 0{,}268$. $P(X \geq 9) \approx 0{,}268 + 0{,}107 = \boxed{0{,}375}$.

Correction 22 — Sondage [Énoncé]

$X \sim B(25, 0{,}3)$.
$P(X \leq 5) \approx \boxed{0{,}193}$ (calculatrice).

$P(X \geq 10) = 1 - P(X \leq 9) \approx 1 - 0{,}811 = \boxed{0{,}189}$.

$E(X) = 25 \times 0{,}3 = \boxed{7{,}5}$. En moyenne, 7,5 personnes sur 25 préfèrent le thé.

Correction 23 — Diagramme en bâtons [Énoncé]

$P(X=0) = \frac{1}{16} = 0{,}0625$; $P(X=1) = \frac{4}{16} = 0{,}25$; $P(X=2) = \frac{6}{16} = 0{,}375$; $P(X=3) = \frac{4}{16} = 0{,}25$; $P(X=4) = \frac{1}{16} = 0{,}0625$. Somme $= 1$ ☒.

$E(X) = 4 \times 0{,}5 = \boxed{2}$. Axe de symétrie en $k = 2$ (diagramme symétrique car $p = 0{,}5$).

Correction 24 — Tirs au but [Énoncé]

$X \sim B(8, 0{,}7)$.
$E(X) = 8 \times 0{,}7 = \boxed{5{,}6}$.

$P(X \geq 6) = P(X=6) + P(X=7) + P(X=8). = \binom{8}{6}(0{,}7)^6(0{,}3)^2 + \binom{8}{7}(0{,}7)^7(0{,}3) + \binom{8}{8}(0{,}7)^8 \approx 0{,}296 + 0{,}198 + 0{,}057 = \boxed{0{,}551}$.

$P(X=4) = \binom{8}{4}(0{,}7)^4(0{,}3)^4 = 70 \times 0{,}2401 \times 0{,}0081 \approx \boxed{0{,}136}$.

Correction 25 — Probabilité seuil [Énoncé]

1. $P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - (0{,}5)^n$.
2. $P(X \geq 1) \geq 0{,}99 \Leftrightarrow (0{,}5)^n \leq 0{,}01$. $n\ln(0{,}5) \leq \ln(0{,}01) \Rightarrow n \geq \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}5)} = \frac{-4{,}605}{-0{,}693} \approx 6{,}64$.
3. Le plus petit entier est $\boxed{n = 7}$.

Correction 26 — Jeu modifié [Énoncé]

Rappel : $E(X) = 10{,}72$ € (gain moyen du joueur).
Sol. 1 (prix 13 €) : bénéfice organisateur $= 13 - 10{,}72 = \boxed{2{,}28}$ €/partie.
Sol. 2 (gains -3 €) : nouveaux gains 0, 12, 97 €. $E'(X) = 0(0{,}648) + 12(0{,}288) + 97(0{,}064) = 3{,}456 + 6{,}208 = 9{,}664$ €. Bénéfice $= 10 - 9{,}664 = \boxed{0{,}336}$ €/partie.
Solution 1 est la plus rentable.

Correction 27 — QCM à 4 choix [Énoncé]

1. Par question : $E_q = \frac{1}{4} \times 2 + \frac{3}{4} \times (-0{,}5) = 0{,}5 - 0{,}375 = \boxed{0{,}125}$ pt.
2. $E(X) = 10 \times 0{,}125 = \boxed{1{,}25}$ pts. En répondant au hasard, on espère 1,25 pt sur 20.

Correction 28 — $B(8, 0{,}25)$ [Énoncé]

1. $P(X=3)=\binom{8}{3}(0{,}25)^3(0{,}75)^5=56\times 0{,}015625\times 0{,}23730\approx \boxed{0{,}208}$.

2. $P(X\leq 4)\approx \boxed{0{,}973}$ (calculatrice).

3. $E(X)=8\times 0{,}25=\boxed{2}$.

Correction 29 — $B(12,\frac{1}{4})$ [Énoncé]

1. $E(X)=12\times\frac{1}{4}=\boxed{3}$.

2. $P(X=3)=\binom{12}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^9=220\times\frac{1}{64}\times\frac{19683}{262144}\approx\boxed{0{,}258}$.

3. $P(X\leq 3)\approx\boxed{0{,}649}$ (calculatrice).

4. $P(X\geq 5)=1-P(X\leq 4)\approx 1-0{,}842=\boxed{0{,}158}$.

Correction 30 — Maternité [Énoncé]

$X\sim B(20,0{,}51)$.

1. $E(X)=20\times 0{,}51=\boxed{10{,}2}$.

2. $P(X=10)=\binom{20}{10}(0{,}51)^{10}(0{,}49)^{10}\approx\boxed{0{,}176}$.

3. $P(X\geq 12)=1-P(X\leq 11)\approx 1-0{,}598=\boxed{0{,}402}$.

4. $P(8\leq X\leq 12)=P(X\leq 12)-P(X\leq 7)\approx 0{,}598-0{,}106=\boxed{0{,}492}$.