Devoir Surveillé n°3 — Chapitre 6

Terminale Techno • Synthèse — Toutes les notions

1 h 30 • Calculatrice autorisée • /20

Consignes : Toutes les réponses doivent être **justifiées et rédigées**. La correction est disponible via [Correction].

Exercice 1 — Loi de probabilité et espérance — jeu équitable [Correction]

X prend les valeurs 2, 3 et a (a réel) avec : $P(X = 2) = \dfrac{1}{2}$, $P(X = 3) = \dfrac{1}{3}$, $P(X = a) = \dfrac{1}{6}$.

On sait que $E(X) = 4$.

a) Vérifier que $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$.

b) Déterminer la valeur de a.

c) Si X représente un gain en euros, ce jeu est-il favorable, équitable ou défavorable pour un joueur qui mise 3 € ?

Exercice 2 — Naissances — loi binomiale [Correction]

Dans une maternité, on estime que la probabilité qu'un enfant soit une fille est 0,51. On choisit de manière indépendante 3 enfants nés dans cette maternité. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de filles parmi ces enfants.

a) Représenter l'expérience à l'aide d'un arbre pondéré.

b) Identifier la loi de X en précisant ses paramètres.

c) Dresser la loi de probabilité de X.

d) Calculer $E(X)$ et interpréter le résultat.

Exercice 3 — Dé tétraédrique [Correction]

On dispose d'un dé en forme de tétraèdre régulier, possédant une face bleue (B), deux faces rouges (R) et une face verte (V) ; on suppose le dé parfaitement équilibré. Une partie consiste à effectuer deux lancers successifs et indépendants. À chaque lancer, on note la couleur de la face cachée.

On considère les événements :

— E : « à l'issue d'une partie, les deux faces notées sont vertes »

— F : « à l'issue d'une partie, les deux faces notées sont de même couleur »

a) Calculer $P(E)$.

b) Calculer $P(F)$.

c) Calculer $P_F(E)$ (probabilité de E sachant F).

d) On effectue 6 parties identiques et indépendantes. Soit Y le nombre de fois où F se réalise. Identifier la loi de Y et calculer $P(Y \geq 2)$.

Exercice 4 — Problème — maternité (suite) [Correction]

On reprend la situation de l'exercice 2 avec cette fois 20 naissances. X = nombre de filles parmi ces 20 naissances.

a) Identifier la loi de X et calculer $E(X)$.

b) Calculer $P(X = 10)$.

c) Calculer $P(X \geq 12)$.

d) Calculer $P(8 \leq X \leq 12)$.

Barème : Ex. 1 : 4 pts Ex. 2 : 6 pts Ex. 3 : 6 pts Ex. 4 : 4 pts /**20**

Corrigé — DS n°3 — Chapitre 6

[Énoncé] revient à l'exercice

Correction 1 — Jeu équitable [Énoncé]

a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}+\frac{1}{6}=\frac{6}{6}=1$ ☒

b) $E(X)=4 \Rightarrow 2\times\frac{1}{2}+3\times\frac{1}{3}+a\times\frac{1}{6}=4 \Rightarrow 1+1+\frac{a}{6}=4 \Rightarrow \frac{a}{6}=2 \Rightarrow \boxed{a=12}$.

c) $E(X)=4>3$: en moyenne le joueur gagne 4 € pour une mise de 3 €. Le jeu est **favorable au joueur**.

Correction 2 — Naissances [Énoncé]

a) Arbre à 2 niveaux (F ou $\bar{F}$), $P(F)=0{,}51$, $P(\bar{F})=0{,}49$.

b) $n=3$ épreuves identiques et indépendantes, $p=0{,}51$. $\boxed{X\sim B(3;0{,}51)}$.

c) $q=0{,}49$.

$P(X=0)=(0{,}49)^3\approx 0{,}1176$.

$P(X=1)=3\times 0{,}51\times(0{,}49)^2=3\times 0{,}51\times 0{,}2401\approx 0{,}3674$.

$P(X=2)=3\times(0{,}51)^2\times 0{,}49=3\times 0{,}2601\times 0{,}49\approx 0{,}3823$.

$P(X=3)=(0{,}51)^3\approx 0{,}1327$.

Vérification : $0{,}1176+0{,}3674+0{,}3823+0{,}1327=1{,}0000$ ☒

k	0	1	2	3
$P(X=k)$	0,1176	0,3674	0,3823	0,1327

d) $E(X)=3\times 0{,}51=\boxed{1{,}53}$. Lorsqu'on choisit 3 enfants, on peut espérer obtenir en moyenne 1,53 fille, soit environ 2 filles.

Correction 3 — Dé tétraédrique [Énoncé]

$P(B)=\frac{1}{4}$, $P(R)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$, $P(V)=\frac{1}{4}$.

a) E = issue V-V. $P(E)=P(V)\times P(V)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\boxed{\frac{1}{16}}$.

b) F = issues B-B, R-R ou V-V. $P(F)=P(B)^2+P(R)^2+P(V)^2=\frac{1}{16}+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}=\frac{1+4+1}{16}=\frac{6}{16}=\boxed{\frac{3}{8}}$.

c) $E\subset F$ (V-V est une issue de même couleur). $P_F(E)=\dfrac{P(E\cap F)}{P(F)}=\dfrac{P(E)}{P(F)}=\dfrac{1/16}{3/8}=\dfrac{1}{16}\times\dfrac{8}{3}=\boxed{\dfrac{1}{6}}$.

d) Y = nombre de fois où F se réalise sur 6 parties. $Y\sim B\left(6,\frac{3}{8}\right)$.

$P(Y\geq 2)=1-P(Y\leq 1)=1-P(Y=0)-P(Y=1)$.

$P(Y=0)=\left(\frac{5}{8}\right)^6=\frac{15625}{262144}\approx 0{,}0596$.

$P(Y=1)=6\times\frac{3}{8}\times\left(\frac{5}{8}\right)^5=6\times\frac{3}{8}\times\frac{3125}{32768}\approx 0{,}2144$.

$P(Y\geq 2)\approx 1-0{,}0596-0{,}2144=\boxed{0{,}726}$.

Correction 4 — Maternité — $n=20$ [Énoncé]

a) $X\sim B(20;0{,}51)$. $E(X)=20\times 0{,}51=\boxed{10{,}2}$.

b) $P(X=10)=\binom{20}{10}(0{,}51)^{10}(0{,}49)^{10}=184756\times(0{,}51)^{10}\times(0{,}49)^{10}\approx\boxed{0{,}176}$.

c) $P(X\geq 12)=1-P(X\leq 11)\approx 1-0{,}598=\boxed{0{,}402}$.

d) $P(8\leq X\leq 12)=P(X\leq 12)-P(X\leq 7)\approx 0{,}703-0{,}106=\boxed{0{,}597}$.