Devoir Surveillé n°2 — Chapitre 6

Terminale Techno • Loi binomiale • Calculatrice • Problèmes contextualisés

1 h • Calculatrice autorisée • /20

Consignes : Toutes les réponses doivent être **justifiées**. La correction est disponible via [Correction].

Exercice 1 — Cyclistes et masques [Correction]

Certains cyclistes s'intéressent à la qualité de l'air avant de partir s'entraîner. Lorsque l'air est mauvais, 30% décident de s'équiper de masques de protection. On choisit au hasard 4 cyclistes. X = nombre de cyclistes qui s'équipent.

a) Identifier la loi de X et donner ses paramètres.

b) Calculer $P(X = 2)$.

c) Calculer $P(X \geq 1)$.

d) Calculer $P(X \leq 2)$.

Exercice 2 — $Y \sim B(5, \frac{1}{5})$ [Correction]

Soit Y la variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = \frac{1}{5}$.

a) En s'aidant du triangle de Pascal, calculer : $P(Y = 0)$, $P(Y = 5)$, $P(Y = 3)$.

b) Calculer $P(Y \geq 2)$ en utilisant l'événement contraire.

c) Calculer $E(Y)$ de deux façons différentes.

Exercice 3 — Jeu de l'urne [Correction]

Une urne contient 6 boules blanches et 4 boules rouges. Un jeu consiste à tirer une boule, noter sa couleur, la remettre dans l'urne, et ceci 3 fois. Pour chaque partie :

— si les 3 boules tirées sont rouges : gain 100 € ;
— si exactement 2 boules sont rouges : gain 15 € ;
— sinon : gain 0 €.

Soit G le gain du joueur (en euros).

a) Montrer que $P(G = 100) = 0{,}064$.

b) Déterminer la loi de probabilité de G.

c) Montrer que $E(G) = 10{,}72$.

d) Le joueur paie 10 € pour jouer. Ce jeu est-il favorable au joueur ? Justifier.

e) L'organisateur envisage d'augmenter le prix de 3 € (passer à 13 €). Calculer le bénéfice moyen de l'organisateur par partie.

Exercice 4 — Contrôle qualité [Correction]

Une usine produit des pièces mécaniques. 5% des pièces sont défectueuses. On prélève 20 pièces. X = nombre de pièces défectueuses.

a) Identifier la loi de X.

b) Calculer $P(X = 0)$ et $P(X = 1)$.

c) Calculer $P(X \geq 2)$ par complémentaire.

d) Calculer $E(X)$ et interpréter.

Barème : Ex. 1 : 4 pts Ex. 2 : 6 pts Ex. 3 : 6 pts Ex. 4 : 4 pts /**20**

CORRIGÉ — DS N°2 — CHAPITRE 6

[Énoncé] revient à l'exercice

Correction 1 — Cyclistes [Énoncé]

a) $n = 4$ épreuves identiques et indépendantes, $p = 0{,}3$. $\boxed{X \sim B(4, 0{,}3)}$.

b) $P(X = 2) = \binom{4}{2}(0{,}3)^2(0{,}7)^2 = 6 \times 0{,}09 \times 0{,}49 = \boxed{0{,}2646}$.

c) $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (0{,}7)^4 = 1 - 0{,}2401 = \boxed{0{,}7599}$.

d) $P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$. $P(X = 0) = (0{,}7)^4 = 0{,}2401$. $P(X = 1) = 4(0{,}3)(0{,}7)^3 = 4 \times 0{,}3 \times 0{,}343 = 0{,}4116$. $P(X \leq 2) = 0{,}2401 + 0{,}4116 + 0{,}2646 = \boxed{0{,}9163}$.

Correction 2 — $Y \sim B(5, \frac{1}{5})$ [Énoncé]

Les coefficients binomiaux pour $n = 5$ (triangle de Pascal) : $\binom{5}{0} = 1$, $\binom{5}{1} = 5$, $\binom{5}{2} = 10$, $\binom{5}{3} = 10$, $\binom{5}{4} = 5$, $\binom{5}{5} = 1$.

a) $P(Y = 0) = 1 \times \left(\frac{1}{5}\right)^0 \times \left(\frac{4}{5}\right)^5 = \left(\frac{4}{5}\right)^5 = \dfrac{1024}{3125}$.

$P(Y = 5) = 1 \times \left(\frac{1}{5}\right)^5 \times \left(\frac{4}{5}\right)^0 = \dfrac{1}{3125}$.

$P(Y = 3) = 10 \times \left(\frac{1}{5}\right)^3 \times \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 10 \times \frac{1}{125} \times \frac{16}{25} = \dfrac{160}{3125} = \dfrac{32}{625}$.

b) $P(Y \geq 2) = 1 - P(Y \leq 1) = 1 - P(Y = 0) - P(Y = 1)$. $P(Y = 1) = 5 \times \frac{1}{5} \times \left(\frac{4}{5}\right)^4 = \frac{1280}{3125} = \frac{256}{625}$. $P(Y \leq 1) = \frac{1024}{3125} + \frac{1280}{3125} = \frac{2304}{3125}$.
$P(Y \geq 2) = 1 - \frac{2304}{3125} = \dfrac{821}{3125} \approx \boxed{0{,}263}$.

c)

— *Par tableau :* Dresser la loi complète, puis $E(Y) = \sum k\,P(Y = k)$. $E(Y) = 0 + \frac{1280}{3125} + 2 \times \frac{640}{3125} + 3 \times \frac{160}{3125} + 4 \times \frac{20}{3125} + 5 \times \frac{1}{3125}$ $= \frac{0+1280+1280+480+80+5}{3125} = \frac{3125}{3125} = \boxed{1}$.

— *Par formule :* $E(Y) = 5 \times \frac{1}{5} = \boxed{1}$ ⊠

Correction 3 — Jeu de l'urne [Énoncé]

$p = P(\text{rouge}) = \frac{4}{10} = 0{,}4$, $q = 0{,}6$, $n = 3$.

a) $P(G = 100) = P(X = 3) = (0{,}4)^3 = 0{,}064$ ⊠

b) $P(G = 15) = P(X = 2) = \binom{3}{2}(0{,}4)^2(0{,}6) = 3 \times 0{,}16 \times 0{,}6 = 0{,}288$. $P(G = 0) = 1 - 0{,}064 - 0{,}288 = 0{,}648$.

g_i	0	15	100
$P(G = g_i)$	0,648	0,288	0,064

c) $E(G) = 0 \times 0{,}648 + 15 \times 0{,}288 + 100 \times 0{,}064 = 0 + 4{,}32 + 6{,}4 = 10{,}72$ ⊠

d) $E(G) = 10{,}72 > 10$: le joueur gagne en moyenne 10,72 € pour une mise de 10 €. Le jeu est **favorable au joueur**.

e) Avec un prix de 13 € : bénéfice organisateur $= 13 - E(G) = 13 - 10{,}72 = \boxed{2{,}28}$ €/partie.

Correction 4 — Contrôle qualité [Énoncé]

a) $n = 20$, $p = 0{,}05$. $\boxed{X \sim B(20, 0{,}05)}$.

b) $P(X = 0) = (0{,}95)^{20} = 0{,}95^{20} \approx \boxed{0{,}358}$.

$P(X = 1) = \binom{20}{1}(0{,}05)^1(0{,}95)^{19} = 20 \times 0{,}05 \times (0{,}95)^{19} = 1 \times 0{,}377 \approx \boxed{0{,}377}$.

c) $P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - 0{,}358 - 0{,}377 = \boxed{0{,}265}$.

d) $E(X) = 20 \times 0{,}05 = \boxed{1}$. En moyenne, on trouve 1 pièce défectueuse sur 20 prélevées.