Devoir Surveillé n°1 — Chapitre 6

Terminale Techno • Espérance • Loi binomiale • Coefficients binomiaux

1 h • Calculatrice autorisée • /20

Consignes : Toutes les réponses doivent être **justifiées**. Soigner la rédaction. La correction est disponible via [Correction].

Exercice 1 — Loi de probabilité et espérance [Correction]

Soit X la variable aléatoire dont la loi est donnée par le tableau suivant :

x_i	0	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	0,2	0,01	0,4	a	0,09

a) Déterminer la valeur de a.

b) Calculer $E(X)$.

c) Interpréter $E(X)$ dans un contexte concret de votre choix.

Exercice 2 — Triangle de Pascal et coefficients binomiaux [Correction]

a) À l'aide du triangle de Pascal, déterminer la valeur de : $\binom{5}{0}$, $\binom{5}{1}$, $\binom{5}{2}$, $\binom{5}{3}$, $\binom{5}{4}$, $\binom{5}{5}$.

b) Vérifier que $\binom{5}{2} = \binom{4}{1} + \binom{4}{2}$ (formule de Pascal).

c) Calculer $\binom{7}{5}$ en utilisant la symétrie, puis vérifier avec la formule.

Exercice 3 — QCM et loi binomiale [Correction]

Un QCM comporte 10 questions avec 5 réponses possibles dont une seule est exacte. Enzo répond au hasard à toutes les questions. Soit Z la variable aléatoire comptant le nombre de bonnes réponses.

a) Montrer que Z suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

b) Calculer $P(Z = 0)$. Interpréter.

c) Calculer $P(Z = 2)$ avec la formule.

d) En moyenne, combien de bonnes réponses Enzo peut-il espérer ?

Exercice 4 — Urne et loi binomiale [Correction]

Une urne contient 3 boules rouges et 6 boules blanches. L'expérience consiste à tirer successivement et avec remise deux boules de l'urne. On note X la variable aléatoire comptant le nombre de boules rouges obtenues.

a) Identifier la loi de X en précisant ses paramètres.

b) Déterminer la loi de probabilité de X (dresser un tableau).

c) Calculer l'espérance de X de **deux façons** différentes et interpréter.

Exercice 5 — Problème — feux piétons [Correction]

Un piéton rencontre successivement 3 feux piétons indépendants. Chaque feu est rouge pendant 45 secondes puis vert pendant 15 secondes. On modélise par un schéma de Bernoulli : succès = feu vert, $p = \frac{1}{4}$. X = nombre de feux verts rencontrés.

a) Identifier la loi de X.

b) Déterminer la loi de probabilité de X.

c) Calculer $E(X)$ et interpréter.

d) Le piéton arrive en retard s'il rencontre au moins 2 feux rouges.

  i. Écrire l'événement « arriver en retard » en fonction de X.

  ii. Calculer la probabilité d'arriver en retard.

Barème : Ex. 1 : 4 pts Ex. 2 : 4 pts Ex. 3 : 4 pts Ex. 4 : 4 pts Ex. 5 : 4 pts /**20**

Corrigé — DS n°1 — Chapitre 6

[Énoncé] revient à l'exercice

Correction 1 — Loi et espérance [Énoncé]

a) La somme des probabilités vaut 1 : $0{,}2 + 0{,}01 + 0{,}4 + a + 0{,}09 = 1 \Rightarrow 0{,}7 + a = 1 \Rightarrow \boxed{a = 0{,}3}$.

b) $E(X) = 0 \times 0{,}2 + 1 \times 0{,}01 + 2 \times 0{,}4 + 3 \times 0{,}3 + 4 \times 0{,}09 = 0 + 0{,}01 + 0{,}8 + 0{,}9 + 0{,}36 = \boxed{2{,}07}$.

c) Exemple : si X représente le nombre d'articles achetés par un client, on peut espérer en moyenne 2,07 articles par client.

Correction 2 — Triangle de Pascal [Énoncé]

a) Ligne $n = 5$ du triangle : $1, 5, 10, 10, 5, 1$. $\binom{5}{0} = 1,\ \binom{5}{1} = 5,\ \binom{5}{2} = 10,\ \binom{5}{3} = 10,\ \binom{5}{4} = 5,\ \binom{5}{5} = 1$.

b) $\binom{4}{1} + \binom{4}{2} = 4 + 6 = 10 = \binom{5}{2}$ ⊠

c) Par symétrie : $\binom{7}{5} = \binom{7}{2} = \dfrac{7 \times 6}{2 \times 1} = \dfrac{42}{2} = \boxed{21}$.

Correction 3 — QCM [Énoncé]

a) 10 questions identiques et indépendantes, succès = bonne réponse avec $p = \frac{1}{5}$. Donc $\boxed{Z \sim B\left(10, \dfrac{1}{5}\right)}$.

b) $P(Z = 0) = \left(\frac{4}{5}\right)^{10} = \dfrac{4^{10}}{5^{10}} = \dfrac{1\,048\,576}{9\,765\,625} \approx \boxed{0{,}107}$. Il y a environ 10,7% de chances de n'avoir aucune bonne réponse.

c) $P(Z = 2) = \binom{10}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^2\left(\frac{4}{5}\right)^8 = 45 \times \frac{1}{25} \times \frac{65536}{390625} \approx 45 \times 0{,}04 \times 0{,}1678 \approx \boxed{0{,}302}$.

d) $E(Z) = 10 \times \frac{1}{5} = \boxed{2}$. En moyenne, Enzo obtient 2 bonnes réponses sur 10 en répondant au hasard.

Correction 4 — Urne [Énoncé]

a) Répétition de $n = 2$ épreuves identiques et indépendantes, succès = rouge, $p = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$. $\boxed{X \sim B\left(2, \dfrac{1}{3}\right)}$.

b) $P(X = 0) = \binom{2}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{4}{9}$.

$P(X = 1) = \binom{2}{1}\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^1 = 2 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \dfrac{4}{9}$.

$P(X = 2) = \binom{2}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^0 = \dfrac{1}{9}$.

Vérification : $\frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9} = \frac{9}{9} = 1$ ⊠

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$

c.)

— *Par tableau :* $E(X) = 0 \times \frac{4}{9} + 1 \times \frac{4}{9} + 2 \times \frac{1}{9} = \frac{4+2}{9} = \frac{6}{9} = \boxed{\dfrac{2}{3}}$.

— *Par formule :* $E(X) = n \times p = 2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ ⊠

En moyenne, on obtient $\frac{2}{3}$ boule rouge sur 2 tirages.

Correction 5 — Feux piétons [Énoncé]

a) $n = 3$ épreuves identiques et indépendantes, $p = \frac{1}{4}$ (feu vert). $\boxed{X \sim B\left(3, \dfrac{1}{4}\right)}$.

b) $q = 1 - p = \frac{3}{4}$.

$P(X=0)=\left(\frac{3}{4}\right)^3=\dfrac{27}{64}$.
$P(X=1)=3\times\frac{1}{4}\times\left(\frac{3}{4}\right)^2=3\times\frac{9}{64}=\dfrac{27}{64}$.
$P(X=2)=3\times\left(\frac{1}{4}\right)^2\times\frac{3}{4}=3\times\frac{3}{64}=\dfrac{9}{64}$.
$P(X=3)=\left(\frac{1}{4}\right)^3=\dfrac{1}{64}$.
Vérification : $\frac{27+27+9+1}{64}=\frac{64}{64}=1$

k	0	1	2	3
$P(X=k)$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{1}{64}$

c) $E(X)=3\times\frac{1}{4}=\dfrac{3}{4}=0{,}75$. En moyenne, le piéton rencontre 0,75 feu vert sur 3 feux, soit environ 1 feu vert.

d.)

i. Au moins 2 feux rouges = au plus 1 feu vert : événement $\{X\leq 1\}$.
ii. $P(X\leq 1)=P(X=0)+P(X=1)=\dfrac{27}{64}+\dfrac{27}{64}=\dfrac{54}{64}=\dfrac{27}{32}\approx\boxed{0{,}844}$.

Il y a environ 84,4% de chances que le piéton arrive en retard.