Devoir Maison n°2 — Chapitre 6

Terminale Techno • Synthèse avancée • Problèmes

A rendre dans 1 semaine • Calculatrice autorisée • /20

Consignes : Toutes les réponses doivent être **justifiées et rédigées**. La correction est disponible via [Correction].

Exercice 1 — Dé tétraédrique — probabilités conditionnelles et loi binomiale [Correction]

On dispose d'un dé en forme de tétraèdre régulier possédant : une face bleue (B), deux faces rouges (R) et une face verte (V).

Une partie consiste à effectuer deux lancers successifs et indépendants. On note la couleur de la face cachée à chaque lancer.

On considère les événements :

— E : « les deux faces notées sont vertes »
— F : « les deux faces notées sont de même couleur »

a) Calculer $P(E)$.

b) Calculer $P(F)$.

c) Calculer $P_F(E)$.

d) On effectue 6 parties identiques et indépendantes. Soit Y la variable aléatoire comptant le nombre de parties où F se réalise.
  i. Identifier la loi de Y.
  ii. Calculer $P(Y \geq 2)$.

Exercice 2 — Problème — feux piétons et retard [Correction]

Un piéton rencontre 3 feux piétons indépendants. Chaque feu est rouge pendant 45 secondes puis vert pendant 15 secondes. $p = P(\text{vert}) = \frac{1}{4}$. X = nombre de feux verts.

a) Représenter par un arbre pondéré la répétition des 3 épreuves de Bernoulli.

b) Identifier la loi de X, ses paramètres.

c) Dresser la loi de probabilité de X.

d) Calculer $E(X)$ et interpréter.

e) Le piéton arrive en retard s'il rencontre au moins 2 feux rouges.
  i. Écrire l'événement « retard » en fonction de X.
  ii. Calculer la probabilité d'arriver en retard.

Exercice 3 — Synthèse — $B(8, 0{,}25)$ et $B(12, \frac{1}{4})$ [Correction]

a) $X \sim B(8, 0{,}25)$.
  i. Calculer $P(X = 3)$ avec la formule.
  ii. Calculer $P(X \leq 4)$ à la calculatrice.
  iii. Calculer $E(X)$.

b) $Y \sim B\left(12, \frac{1}{4}\right)$.
  i. Calculer $E(Y)$.
  ii. Calculer $P(Y = 3)$ avec la formule.

iii. Calculer $P(Y \leq 3)$ à la calculatrice.
iv. Calculer $P(Y \geq 5)$.

Exercice 4 — Problème ouvert — contrôle qualité et seuil **[Correction]**

Une usine produit des pièces. 5% sont défectueuses. On prélève n pièces. X = nombre de pièces défectueuses.

a) Loi de X et $E(X)$ pour $n = 20$.

b) Calculer $P(X = 0)$ pour $n = 20$.

c) On cherche le plus petit n tel que la probabilité d'avoir au moins une pièce défectueuse soit supérieure ou égale à 0,95.

i. Écrire l'inégalité à résoudre.
ii. Résoudre $(0{,}95)^n \leq 0{,}05$.
iii. Conclure.

Barème : Ex. 1 : 6 pts Ex. 2 : 6 pts Ex. 3 : 5 pts Ex. 4 : 3 pts /**20**

CORRIGÉ — DM N°2 — CHAPITRE 6

[Énoncé] revient à l'exercice

Correction 1 — Dé tétraédrique [Énoncé]

$P(B) = \frac{1}{4}$, $P(R) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, $P(V) = \frac{1}{4}$.

a) E = issue V-V sur les deux lancers. $P(E) = P(V) \times P(V) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \boxed{\frac{1}{16}}$.

b) F se réalise pour les issues B-B, R-R, V-V. $P(F) = (P(B))^2 + (P(R))^2 + (P(V))^2 = \frac{1}{16} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{1}{16} + \frac{4}{16} + \frac{1}{16} = \frac{6}{16} = \boxed{\frac{3}{8}}$.

c) $E \subset F$ (V-V est un cas de même couleur), donc $E \cap F = E$. $P_F(E) = \dfrac{P(E \cap F)}{P(F)} = \dfrac{P(E)}{P(F)} = \dfrac{1/16}{3/8} = \dfrac{1}{16} \times \dfrac{8}{3} = \boxed{\dfrac{1}{6}}$.

d.)

i. $Y \sim \mathcal{B}\left(6, \frac{3}{8}\right)$: 6 épreuves identiques et indépendantes, $p = P(F) = \frac{3}{8}$.

ii. $P(Y \geq 2) = 1 - P(Y \leq 1) = 1 - P(Y = 0) - P(Y = 1)$.
$P(Y = 0) = \left(\frac{5}{8}\right)^6 = \frac{15625}{262144} \approx 0{,}0596$.
$P(Y = 1) = 6 \times \frac{3}{8} \times \left(\frac{5}{8}\right)^5 = 6 \times \frac{3}{8} \times \frac{3125}{32768} \approx 0{,}2144$.
$P(Y \geq 2) \approx 1 - 0{,}0596 - 0{,}2144 = \boxed{0{,}726}$.

Correction 2 — Feux piétons [Énoncé]

a) Arbre à 3 niveaux, chaque branche marquée V ($p = \frac{1}{4}$) ou $\bar{V}$ ($q = \frac{3}{4}$).

b) $X \sim \mathcal{B}\left(3, \frac{1}{4}\right)$: $n = 3$, $p = \frac{1}{4}$.

c) $P(X = 0) = \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \dfrac{27}{64}$. $P(X = 1) = 3 \times \frac{1}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 3 \times \frac{9}{64} = \dfrac{27}{64}$. $P(X = 2) = 3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \frac{3}{4} = 3 \times \frac{3}{64} = \dfrac{9}{64}$. $P(X = 3) = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \dfrac{1}{64}$. Somme $= \frac{27+27+9+1}{64} = \frac{64}{64} = 1$ ☒.

k	0	1	2	3
$P(X = k)$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{1}{64}$

d) $E(X) = 3 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0{,}75$. En moyenne, le piéton rencontre 0,75 feu vert sur 3 feux, soit environ 1 feu vert.

e.)

i. Retard $\Leftrightarrow$ au moins 2 rouges $\Leftrightarrow$ au plus 1 vert : $\{X \leq 1\}$.

ii. $P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{27}{64} + \frac{27}{64} = \frac{54}{64} = \frac{27}{32} \approx \boxed{0{,}844}$.

Il y a environ 84,4% de chances que le piéton arrive en retard.

Correction 3 — Calculs $B(8; 0{,}25)$ et $B(12; \frac{1}{4})$ [Énoncé]

a) $X \sim \mathcal{B}(8; 0{,}25)$.

i. $P(X = 3) = \binom{8}{3}(0{,}25)^3(0{,}75)^5 = 56 \times \frac{1}{64} \times \frac{3^5}{4^5} = 56 \times 0{,}015625 \times 0{,}2373 \approx \boxed{0{,}208}$.

ii. $P(X \leq 4) \approx \boxed{0{,}973}$ (calculatrice).

iii. $E(X) = 8 \times 0{,}25 = \boxed{2}$.

b) $Y \sim \mathcal{B}\left(12; \frac{1}{4}\right)$.

i. $E(Y) = 12 \times \frac{1}{4} = \boxed{3}$.

ii. $P(Y = 3) = \binom{12}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^9 = 220 \times \frac{1}{64} \times \frac{3^9}{4^9} = 220 \times \frac{19683}{16777216} \approx \boxed{0{,}258}$.

iii. $P(Y \leq 3) \approx \boxed{0{,}649}$ (calculatrice).

iv. $P(Y \geq 5) = 1 - P(Y \leq 4) \approx 1 - 0{,}842 = \boxed{0{,}158}$.

Correction 4 — Contrôle qualité [Énoncé]

a) $X \sim B(20; 0{,}05)$. $E(X) = 20 \times 0{,}05 = \boxed{1}$ pièce défectueuse en moyenne.

b) $P(X = 0) = (0{,}95)^{20} \approx \boxed{0{,}358}$.

c.)

i. $P(X \geq 1) \geq 0{,}95 \Leftrightarrow 1 - P(X = 0) \geq 0{,}95 \Leftrightarrow P(X = 0) \leq 0{,}05 \Leftrightarrow (0{,}95)^n \leq 0{,}05$.

ii. $n \ln(0{,}95) \leq \ln(0{,}05) \Rightarrow n \geq \dfrac{\ln(0{,}05)}{\ln(0{,}95)} = \dfrac{-2{,}996}{-0{,}0513} \approx 58{,}4$.

iii. Il faut prélever au moins $\boxed{n = 59}$ pièces pour avoir 95% de chance de détecter une pièce défectueuse.