Devoir Maison n°1 — Chapitre 6

Terminale Techno • Espérance • Loi binomiale • Problèmes

A rendre dans 1 semaine • Calculatrice autorisée • /20

Consignes : Toutes les réponses doivent être **justifiées**. Soigner la rédaction. La correction est disponible via [Correction].

Exercice 1 — Deux dés — variable aléatoire [Correction]

On lance deux dés à 6 faces équilibrés (dé n°1 et dé n°2). On note X la variable aléatoire égale à la différence du résultat du dé n°1 avec celui du dé n°2.

a) Compléter le tableau à double entrée ci-dessous qui donne tous les résultats de cette expérience.

Dé n°1 / Dé n°2	1	2	3	4	5	6
1	0					
2						
3						
4						
5						
6						

b) Donner les valeurs prises par X.

c) Dresser la loi de probabilité de X sous forme de tableau.

d) Calculer l'espérance de X.

Exercice 2 — Triangle de Pascal et coefficients [Correction]

a) Recopier et compléter le triangle de Pascal jusqu'à la ligne $n = 5$.

b) Déterminer : $\binom{5}{0}$, $\binom{5}{1}$, $\binom{5}{2}$, $\binom{5}{3}$, $\binom{5}{4}$, $\binom{5}{5}$.

c) Calculer $\sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k}$. Que remarque-t-on ?

Exercice 3 — Loi binomiale — naissances [Correction]

Dans une maternité, on estime que la probabilité qu'un enfant soit une fille est 0,51. On choisit de manière indépendante 3 enfants nés dans cette maternité. X = nombre de filles parmi ces 3 enfants.

a) Représenter la situation par un arbre pondéré.

b) Identifier la loi de X.

c) Dresser la loi de probabilité de X.

d) Calculer $E(X)$ et interpréter.

Exercice 4 — Problème — jeu de l'urne [Correction]

Urne : 6 blanches, 4 rouges. On tire 3 fois avec remise. Gain : 3 rouges → 100 € ; 2 rouges → 15 € ; autres → 0 €. Prix de participation : 10 €.

a) Montrer que $P(\text{gain} = 100) = 0{,}064$.

b) Dresser la loi de probabilité du gain brut G.

c) Montrer que $E(G) = 10{,}72$.

d) Ce jeu est-il favorable au joueur ? Justifier.

e) L'organisateur envisage deux solutions pour rendre le jeu moins favorable au joueur :
— Solution 1 : augmenter le prix à 13 € ;
— Solution 2 : diminuer chaque gain de 3 € (prix reste 10 €).
Quelle solution est la plus rentable pour l'organisateur ? Justifier.

Barème : Ex. 1 : 5 pts Ex. 2 : 4 pts Ex. 3 : 5 pts Ex. 4 : 6 pts /**20**

ibrahim-rudasingwa

Corrigé — DM n°1 — Chapitre 6

[Énoncé] revient à l'exercice

Correction 1 — Deux dés [Énoncé]

a) Tableau complété (case (i, j) vaut $i - j$) :

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	0	-1	-2	-3	-4	-5
2	1	0	-1	-2	-3	-4
3	2	1	0	-1	-2	-3
4	3	2	1	0	-1	-2
5	4	3	2	1	0	-1
6	5	4	3	2	1	0

b) X prend les valeurs $-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$.
c) Par symétrie, pour $k \geq 0$: $P(X = 0) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$; $P(X = \pm 1) = \frac{5}{36}$; $P(X = \pm 2) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$; $P(X = \pm 3) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$; $P(X = \pm 4) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$; $P(X = \pm 5) = \frac{1}{36}$.
Vérification : $\frac{1}{36}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1) = \frac{36}{36} = 1$ ⊠.

d) Par symétrie autour de 0 : $\boxed{E(X) = 0}$. Le jeu est équitable.

Correction 2 — Triangle de Pascal [Énoncé]

a) $n = 0 : 1 \quad n = 1 : 1, 1 \quad n = 2 : 1, 2, 1 \quad n = 3 : 1, 3, 3, 1 \quad n = 4 : 1, 4, 6, 4, 1 \quad n = 5 : 1, 5, 10, 10, 5, 1$.
b) $\binom{5}{0} = 1$, $\binom{5}{1} = 5$, $\binom{5}{2} = 10$, $\binom{5}{3} = 10$, $\binom{5}{4} = 5$, $\binom{5}{5} = 1$.
c) $\sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} = 1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 32 = 2^5$. La somme des coefficients de la ligne n est égale à 2^n.

Correction 3 — Naissances [Énoncé]

a) Arbre pondéré à 3 niveaux, $P(F) = 0{,}51$, $P(\bar{F}) = 0{,}49$.
b) $n = 3$ épreuves identiques et indépendantes, $p = 0{,}51$. $X \sim B(3; 0{,}51)$.
c) $P(X = 0) = (0{,}49)^3 \approx 0{,}1176$; $P(X = 1) = 3(0{,}51)(0{,}49)^2 \approx 0{,}3674$; $P(X = 2) = 3(0{,}51)^2(0{,}49) \approx 0{,}3823$; $P(X = 3) = (0{,}51)^3 \approx 0{,}1327$.

k	0	1	2	3
$P(X = k)$	0,1176	0,3674	0,3823	0,1327

d) $E(X) = 3 \times 0{,}51 = 1{,}53$. En moyenne, parmi 3 enfants choisis dans cette maternité, on peut espérer 1,53 fille (soit environ 2).

Correction 4 — Jeu de l'urne [Énoncé]

a) $p = 0{,}4$, $n = 3$. $P(\text{gain} = 100) = P(X = 3) = (0{,}4)^3 = 0{,}064$ ⊠
b) $P(\text{gain} = 15) = P(X = 2) = 3(0{,}4)^2(0{,}6) = 0{,}288$. $P(\text{gain} = 0) = 1 - 0{,}064 - 0{,}288 = 0{,}648$.

g_i	0	15	100
P	0,648	0,288	0,064

c) $E(G) = 0(0{,}648) + 15(0{,}288) + 100(0{,}064) = 4{,}32 + 6{,}40 = 10{,}72$ ⊠
d) $E(G) = 10{,}72 > 10$: le joueur gagne en moyenne 10,72 € pour 10 € misés. **Favorable au joueur.**
e) *Sol. 1* (prix 13 €) : bénéfice moyen $= 13 - 10{,}72 =$ **2,28** €/partie.

Sol. 2 (gains -3 €) : nouveaux gains 0 €, 12 €, 97 €. $E'(G) = 0(0{,}648) + 12(0{,}288) + 97(0{,}064) = 3{,}456 + 6{,}208 = 9{,}664$ €. Bénéfice $= 10 - 9{,}664 =$ **0,336** €/partie.

La solution 1 est la plus rentable pour l'organisateur ($2{,}28 > 0{,}34$).

ibrahim-rudasingwa