

Chapitre 6 – Variables aléatoires et loi binomiale

Terminale Techno • Probabilités

Table des matières

Activités		2
1	Espérance d'une variable aléatoire discrète	4
2	Schéma de Bernoulli et loi binomiale	5
3	Coefficients binomiaux et triangle de Pascal	6
4	Formule générale et espérance de la loi binomiale	8
	Diagramme en bâtons	9
	Exercice de synthèse	10
	Bilan	11
	Carte mentale	11

PROGRAMME (BO – SECONDE • MATHÉMATIQUES)

Contenus : Espérance d'une variable aléatoire discrète : $E(X) = \sum x_i P(X = x_i)$. Schéma de Bernoulli. Loi binomiale $B(n, p)$. Coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$; triangle de Pascal. $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. Espérance $E(X) = np$. Diagramme en bâtons.

Démonstrations : $E(X) = \sum x_i P(X = x_i)$. $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. $E(X) = np$. $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ (Pascal).

Capacités : Reconnaître un schéma de Bernoulli. Calculer une espérance. Calculer des probabilités avec la loi binomiale (formule ou calculatrice). Lire et construire un diagramme en bâtons.

Tout le cours



Activités

Objectif : calculer l'espérance d'une variable aléatoire discrète.

On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes. Le gain X (en euros) dépend de la carte tirée : cœur $\rightarrow +2$ €, Roi (hors cœur) $\rightarrow +5$ €, Roi de cœur $\rightarrow +7$ €, autre $\rightarrow -1$ €.

1. Rappeler le nombre de cartes de chaque type dans un jeu de 32.
2. Dresser la loi de probabilité de X (tableau $x_i / P(X = x_i)$).
3. Vérifier que la somme des probabilités vaut 1.
4. Calculer $E(X)$. Interpréter le résultat.
5. Ce jeu est-il favorable au joueur ? équitable ? défavorable ?

Correction. Jeu de 32 : 8 cœurs (dont 1 Roi cœur = gain +7 €), 7 cœurs non-roi (gain +2 €), 3 Rois non cœur (gain +5 €), 21 autres (gain -1 €).

x_i	-1	2	5	7
$P(X = x_i)$	$\frac{21}{32}$	$\frac{7}{32}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{1}{32}$

Vérification : $\frac{21 + 7 + 3 + 1}{32} = \frac{32}{32} = 1 \quad \square$

$E(X) = (-1) \cdot \frac{21}{32} + 2 \cdot \frac{7}{32} + 5 \cdot \frac{3}{32} + 7 \cdot \frac{1}{32} = \frac{-21 + 14 + 15 + 7}{32} = \frac{15}{32} \approx 0,47$ €. Favorable au joueur (espérance positive).

Objectif : identifier les conditions d'un schéma de Bernoulli.

Une urne contient 3 boules rouges et 7 boules blanches. On effectue 4 tirages successifs **avec remise**. Soit X le nombre de boules rouges obtenues.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule rouge à chaque tirage ?
2. Les tirages sont-ils indépendants ? identiques ?
3. Lister les issues avec exactement 2 boules rouges. Combien y en a-t-il ?
4. Quelle est la probabilité de chacune de ces issues ?
5. En déduire $P(X = 2)$.
6. Généraliser : donner $P(X = k)$ pour $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Correction. 1. $p = 0,3$. 2. Oui (remise). 3. $\binom{4}{2} = 6$ issues. 4. $(0,3)^2(0,7)^2 = 0,0441$. 5. $P(X = 2) = 6 \times 0,0441 = 0,2646$. 6. $P(X = k) = \binom{4}{k}(0,3)^k(0,7)^{4-k}$.

Objectif : construire et utiliser le triangle de Pascal.

1. Compléter le triangle de Pascal jusqu'à la ligne $n = 6$.

	1					$n = 0$	
	1	1				$n = 1$	
	1	2	1			$n = 2$	
	1	3	3	1		$n = 3$	
	1	4	6	4	1	$n = 4$	
	1	5	10	10	5	1	$n = 5$
	1, 6, 15, 20, 15, 6, 1						$n = 6$

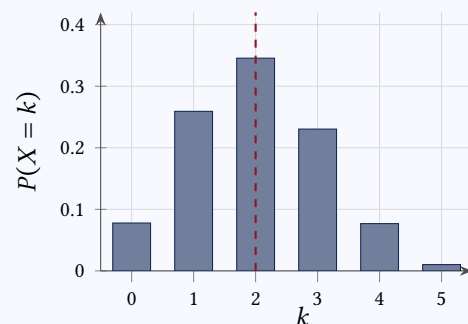
2. Lire dans le triangle : $\binom{4}{2}$, $\binom{5}{3}$, $\binom{6}{4}$.

3. Vérifier avec la formule de Pascal : $\binom{6}{4} = \binom{5}{3} + \binom{5}{4}$.

4. Quelle propriété de symétrie observe-t-on ? Vérifier avec $\binom{5}{2}$ et $\binom{5}{3}$.

Correction. 2. 6; 10; 15. 3. $15 = 10 + 5$ ✓. 4. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$: $\binom{5}{2} = \binom{5}{3} = 10$.

Objectif : représenter la loi $B(5, 0,4)$ et calculer son espérance.



1. Calculer $P(X = k)$ pour $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ avec $X \sim B(5, 0,4)$.

2. Compléter le tableau de la loi.

3. Tracer le diagramme en bâtons sur le repère ci-contre.

4. Où se situe $E(X) = np$ sur le diagramme ?

5. Calculer $E(X)$. Interpréter.

Correction. $P(X = 0) \approx 0,078$; $P(X = 1) \approx 0,259$; $P(X = 2) \approx 0,346$; $P(X = 3) \approx 0,230$; $P(X = 4) \approx 0,077$; $P(X = 5) \approx 0,010$. $E(X) = 5 \times 0,4 = 2$: en moyenne 2 succès sur 5 épreuves.

1 Espérance d'une variable aléatoire discrète**Définition.**

L'espérance mathématique de X est :

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i \times P(X = x_i)$$

C'est la **moyenne** que l'on peut espérer sur un grand nombre de répétitions.

Loi de probabilité :

x_i	x_1	x_2	...	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	...	p_n

Avec $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$.

Exemple – Jeu de cartes (32)

Cœur $\rightarrow +2$ €, Roi $\rightarrow +5$ €, Roi de cœur $\rightarrow +7$ €, Autre $\rightarrow -1$ €.

x_i	-1	2	5	7
P	$\frac{21}{32}$	$\frac{7}{32}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{1}{32}$

$$E(X) = (-1) \cdot \frac{21}{32} + 2 \cdot \frac{7}{32} + 5 \cdot \frac{3}{32} + 7 \cdot \frac{1}{32} \approx 0,47 \text{ €}.$$

On peut espérer gagner **0,47 €** par partie.

Méthode :

1. Dresser la loi de X .
2. Vérifier $\sum p_i = 1$.
3. Calculer $E(X) = \sum x_i p_i$.
4. Interpréter.

Méthode – Calculer l'espérance d'une variable aléatoire

On tire une carte dans un jeu de 52. $X =$ gain : As $\rightarrow +10$ €, Figure $\rightarrow +2$ €, Autre $\rightarrow -1$ €.

$$P(X = 10) = \frac{4}{52}, P(X = 2) = \frac{12}{52}, P(X = -1) = \frac{36}{52}.$$

$$E(X) = 10 \cdot \frac{4}{52} + 2 \cdot \frac{12}{52} + (-1) \cdot \frac{36}{52} = \frac{28}{52} \approx 0,54 \text{ €}.$$

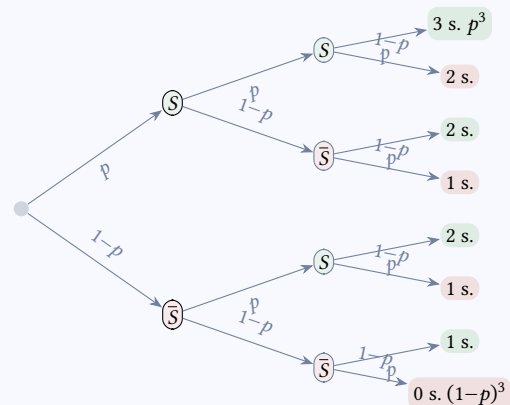
Exercice. Un jé à 6 faces équitabile. Pair $\rightarrow +3$ €, 3 ou 5 $\rightarrow +5$ €, 1 $\rightarrow -2$ €. **a)** Dresser la loi de X . **b)** Calculer $E(X)$.

Correction. $P(X = 3) = \frac{3}{6}, P(X = 5) = \frac{2}{6}, P(X = -2) = \frac{1}{6}. E(X) = \frac{9+10-2}{6} = \frac{17}{6} \approx 2,83 \text{ €}.$



Méthode – Calculer l'espérance d'une variable aléatoire

2 Schéma de Bernoulli et loi binomiale


Définitions.

Épreuve de Bernoulli : expérience à 2 issues.

Succès (proba p) / Échec (proba $1 - p$).

Schéma de Bernoulli : répétition de n épreuves de Bernoulli **identiques et indépendantes**.

Loi binomiale $B(n, p)$: loi du nombre de succès X .

Paramètres : n (répétitions), p (proba succès).

Méthode – Reconnaître et appliquer une loi binomiale**Jeu Némó** (3 tirages, 1 carte sur 4) : $n = 3$, $p = \frac{1}{4}$. $P(X = 2)$ = nb de chemins avec 2 succès \times proba d'un chemin.Il y a $\binom{3}{2} = 3$ chemins (SSÉ, SÉS, ÉSS) :

$$P(X = 2) = 3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \frac{3}{4} = \frac{9}{64} \approx 14\%$$

Exercice. On lance un dé 5 fois. Succès = obtenir un 6. **a)** X suit quelle loi ? **b)** Calculer $P(X = 0)$ et $P(X = 1)$.

Correction. a) $X \sim B(5, \frac{1}{6})$. b) $P(X = 0) = \left(\frac{5}{6}\right)^5 \approx 0,402$. $P(X = 1) = 5 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0,402$.



Méthode – Reconnaître et appliquer une loi binomiale

3 Coefficients binomiaux et triangle de Pascal

Triangle de Pascal

$n=0$: 1
 $n=1$: 1 1
 $n=2$: 1 2 1
 $n=3$: 1 3 3 1
 $n=4$: 1 4 6 4 1
 $n=5$: 1 5 10 10 5 1
 $n=6$: 1 6 15 20 15 6 1

$$\binom{4}{2} = 6 \text{ (en bleu).}$$

$$\binom{6}{4} = \binom{5}{3} + \binom{5}{4} = 10 + 5 = 15.$$

Définition et propriétés.

$\binom{n}{k}$ = **nombre de chemins** avec k succès
 parmi n épreuves.

Propriétés :

$$- \binom{n}{0} = 1 \quad \binom{n}{n} = 1$$

$$- \binom{n}{1} = n \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Formule de Pascal :

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Calculatrice : touche nCr.

Tableur : =COMBIN(n ; k).

Méthode – Calculer un coefficient binomial**Par Pascal :** $\binom{5}{2} = \binom{4}{1} + \binom{4}{2} = 4 + 6 = 10$.**Par formule :** $\binom{5}{2} = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$.**Calculatrice :** $5 \text{ nCr } 2 = 10$.**Exercice.** Calculer sans calculatrice : $\binom{6}{2}$, $\binom{7}{5}$, $\binom{10}{0}$, $\binom{5}{3}$.**Correction.** 15; 21; 1; 10.**Utiliser Pascal :** chaque coefficient = somme des deux du dessus.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Symétrie : $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$



Méthode – Calculer un coefficient binomial

4 Formule générale et espérance de la loi binomiale**Formule et espérance.**Si $X \sim B(n, p)$, pour $k \in \{0, 1, \dots, n\}$:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Espérance : $E(X) = n \times p$ **Valeurs particulières :**

$$P(X = 0) = (1-p)^n$$

$$P(X = n) = p^n$$

$$P(X \geq 1) = 1 - (1-p)^n$$

Exemple – Urne (4 tirages)5 boules gagnantes + 7 perdantes. $n = 4$,
 $p = \frac{5}{12}$.

$$P(X = 3) = \binom{4}{3} \left(\frac{5}{12}\right)^3 \left(\frac{7}{12}\right) \approx 0,17$$

Espérance – QCM8 questions, 3 choix, $p = \frac{1}{3}$. $E(X) = 8 \times \frac{1}{3} = \frac{8}{3} \approx 2,67$ bonnes réponses.

Méthode – Calculer des probabilités avec la loi binomiale

$X \sim B\left(7, \frac{2}{3}\right)$. Calculer $P(X \leq 5)$ et $P(X \geq 3)$.

$P(X \leq 5)$: utiliser la calculatrice.

– TI : `binomcdf(7, 2/3, 5)`

– Casio : `BinominaleCD(5, 7, 2/3)`

– Tableur : `=LOI.BINOMIALE(5;7;2/3;1)`

$P(X \leq 5) \approx 0,74$. $P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) \approx 0,955$.

Exercice. $X \sim B(10, 0,3)$. **a)** $P(X = 4)$. **b)** $P(X \leq 3)$. **c)** $P(X \geq 5)$. **d)** $E(X)$.

Correction. a) $\approx 0,200$. b) $\approx 0,650$. c) $\approx 0,150$. d) $E(X) = 3$.

Calculatrice :

$P(X = k)$: `binompdf / BinomPD`

$P(X \leq k)$: `binomcdf / BinomCD`

$P(X \geq k) = 1 - P(X \leq k-1)$

Tableur :

`=LOI.BINOMIALE(k;n;p;0)` :
 $P(X = k)$

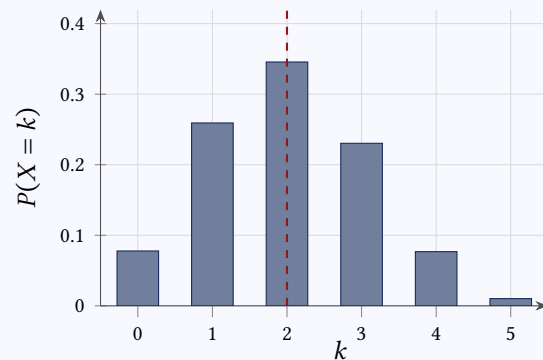
`=LOI.BINOMIALE(k;n;p;1)` :
 $P(X \leq k)$



Méthode – Calculer des probabilités avec la loi binomiale (1)

Méthode – Calculer des probabilités avec la loi binomiale (2)

Diagramme en bâtons

**Lire et tracer.**

$X \sim B(5, 0,4)$: tableau de la loi.

k	$P(X = k)$
0	0,078
1	0,259
2	0,346
3	0,230
4	0,077
5	0,010

Diagramme en bâtons



La verticale en $k = E(X) = np = 2$ matérialise l'espérance.

Exercice. Représenter $B(4, 0,5)$. Calculer $E(X)$.

Correction. $E(X) = 2$. Diagramme symétrique en $k = 2$.

Exercice de synthèse

- On tire une carte dans un jeu de 52. $X =$ gain : As $\rightarrow +10$ €, Figure $\rightarrow +2$ €, Autre $\rightarrow -1$ €. Dresser la loi, calculer $E(X)$ et interpréter.
- Calculer à l'aide du triangle de Pascal : $\binom{6}{2}$, $\binom{7}{5}$, $\binom{10}{0}$, $\binom{5}{3}$.
- $X \sim B(8, 0,25)$. **a)** Calculer $P(X = 3)$ avec la formule. **b)** Calculer $P(X \leq 4)$ à la calculatrice. **c)** Calculer $E(X)$.
- Un QCM a 10 questions à 4 choix. On répond au hasard. Quelle note peut-on espérer si chaque bonne réponse vaut 2 pts ?
- Représenter par un diagramme en bâtons la loi $B(4, 0,5)$.

Correction. 1. $E(X) \approx 0,54$ €. 2. 15; 21; 1; 10. 3. a) $\approx 0,208$. b) $\approx 0,973$. c) $E = 2$. 4. $E = 2,5$ bonnes rép., note ≈ 5 pts. 5. $E(X) = 2$.

Bilan

<p>Espérance : $E(X) = \sum x_i P(X = x_i)$</p> <p>Loi binomiale $B(n, p)$: $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$ $E(X) = np$</p> <p><i>Test : $X \sim B(6, \frac{1}{3})$. Calculer $E(X)$ et $P(X = 2)$.</i></p> <div style="border: 1px solid red; padding: 5px; margin-top: 10px;"> <p>Correction. $E(X) = 2$. $P(X = 2) = \binom{6}{2} (\frac{1}{3})^2 (\frac{2}{3})^4 \approx 0,329$.</p> </div>	<p>Coefficients binomiaux : $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$</p> <p>Calculatrice : $P(X \leq k) : \text{binomcdf}(n, p, k)$ $P(X \geq k) = 1 - P(X \leq k - 1)$</p> <p><i>Test : Calculer $\binom{5}{2}$ avec Pascal. $X \sim B(4, 0,5)$: calculer $P(X \geq 3)$.</i></p> <div style="border: 1px solid red; padding: 5px; margin-top: 10px;"> <p>Correction. $\binom{5}{2} = 10$. $P(X \geq 3) = 0,3125$.</p> </div>
---	--

Carte mentale – Variables aléatoires et loi binomiale

