

## Planche d'exercices n°2

Probabilités conditionnelles

Terminale Techno – Chapitre 5

### Exercice 31 – Arbre à trois niveaux [ Correction ]

Un magasin propose trois marques (A, B, C) avec des probabilités 0,5, 0,3, 0,2.

1. Parmi les clients achetant A : 0,7 sont satisfaits.
2. Parmi les clients achetant B : 0,6 sont satisfaits.
3. Parmi les clients achetant C : 0,8 sont satisfaits.

Dessinez l'arbre et calculez la probabilité qu'un client soit satisfait.

### Exercice 32 – Événements dépendants [ Correction ]

Deux urnes contiennent des boules. Urne 1 : 3 blanches, 2 noires. Urne 2 : 1 blanche, 4 noires. On choisit une urne (probabilité  $\frac{1}{2}$ ), puis on tire une boule. Trouvez  $P(\text{blanche})$ .

### Exercice 33 – Test de contrôle [ Correction ]

Une machine produit 1000 pièces par jour. 2% sont défectueuses. Un test détecte les défauts avec probabilité 0,95. Il donne aussi 3% de faux positifs. Calculez la probabilité qu'une pièce soit réellement défectueuse sachant que le test est positif.

### Exercice 34 – Trois étapes [ Correction ]

Jean envoie un message par trois relais. Chaque relai transmet correctement avec probabilité 0,9. Trouvez la probabilité que le message arrive intact.

### Exercice 35 – Branches multiples [ Correction ]

Un étudiant réussit l'examen avec probabilité 0,6 s'il a étudié (0,4) et 0,2 s'il n'a pas étudié. Quel est le taux de réussite global ?

### Exercice 36 – Trois partitions [ Correction ]

Population : 50% cadres, 30% ouvriers, 20% employés. Primes annuelles : cadres 0,8, ouvriers 0,5, employés 0,4. Proportion moyenne ?

### Exercice 37 – Loi totale [ Correction ]

Trois fournisseurs F1, F2, F3 livrent respectivement 40%, 35%, 25% de la production. Taux de défaut : 2%, 3%, 1,5%. Calcul du taux de défaut global.

### Exercice 38 – Partition inégale [ Correction ]

Usine A fournit 60% des pièces (défaut 3%), usine B en fournit 40% (défaut 2%). Une pièce défectueuse est trouvée. Quelle est la probabilité qu'elle vienne de A ?

### Exercice 39 – Quatre branches [ Correction ]

Un serveur d'email marque les messages comme spam selon 4 critères avec dépendances. Utilisez la formule des probabilités totales avec 4 cas.

### Exercice 40 – Inversion de Bayes [ Correction ]

Test de maladie : sensibilité 99%, spécificité 95%. Prévalence 0,1%. Risque vrai si test positif ?

### Exercice 41 – Test indépendance [ Correction ]

Événements A et B :  $P(A) = 0,4$ ,  $P(B) = 0,5$ ,  $P(A \cap B) = 0,2$ . Indépendants ?

### Exercice 42 – Indépendance conditionnelle [ Correction ]

$P(A) = 0,3$ ,  $P(B) = 0,5$ ,  $P(A \cap B) = 0,15$ . Montrez que A et B sont indépendants.

### Exercice 43 – Trois événements [ Correction ]

A, B, C tels que  $P(A) = P(B) = P(C) = 0,5$  et mutuellement indépendants. Trouvez  $P(A \cup B \cup C)$ .

### Exercice 44 – Indépendance deux à deux [ Correction ]

Montrez qu'indépendance deux à deux ne garantit pas l'indépendance mutuelle (exemple du dé).

### Exercice 45 – Application pratique [ Correction ]

Deux systèmes de sécurité indépendants (fiabilité 0,99 chacun). Probabilité que les deux fonctionnent ?

### Exercice 46 – Diagnostic médical [ Correction ]

Test pour maladie rare : sensibilité 97%, spécificité 98%, prévalence 0,5%. Valeur prédictive positive ?

**Exercice 47** – Contrôle qualité [ Correction ]

Production : 95% bonnes pièces. Contrôle accepte bonnes avec 0,98, rejette mauvaises avec 0,96. Taux d'erreur ?

**Exercice 48** – Assurance auto [ Correction ]

Deux groupes d'âge. Jeunes (30%, sinistre 0,15), seniors (70%, sinistre 0,08). Probabilité sinistre ?

**Exercice 49** – Fiabilité système [ Correction ]

Système avec composantes en série (indépendantes). Fiabilités : 0,9, 0,92, 0,88. Fiabilité globale ?

**Exercice 50** – Épidémiologie [ Correction ]

Trois facteurs de risque. Probabilités :  $P(R_1) = 0,4$ ,  $P(R_2) = 0,3$ ,  $P(R_3) = 0,2$ . Maladie si au moins un facteur. Risque global ?

**Exercice 51** – BAC exercice complet [ Correction ]

Une école propose deux filières : 60% scientifique,

40% générale. Réussite : sci. 0,8, gén. 0,7.

1. Taux de réussite global ?
2. Un élève a réussi. Probabilité qu'il soit en sci. ?

**Exercice 52** – BAC arbre large [ Correction ]

Trois villes avec usines produisant des articles. Arbre à 6 branches. Calculs de probabilités totales et conditionnelles.

**Exercice 53** – BAC Bayes [ Correction ]

Trois hypothèses  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $H_3$  sur l'origine d'une contamination. Observations X rendent une hypothèse plus probable.

**Exercice 54** – BAC synthèse [ Correction ]

Réunion trois salles avec participation variable. Quelqu'un arrive tard. Quelle salle a choisi ?

**Exercice 55** – BAC vrai/faux justifiés [ Correction ]

Cinq affirmations sur indépendance, probabilités conditionnelles, formule de Bayes à justifier.

**Exercice 56** – Combinaison concepts [ Correction ]

Trois épreuves indépendantes, chacune menée deux fois. Arbre complexe avec calculs de probabilité totale.

**Exercice 57** – Paradoxe de Simpson [ Correction ]

Deux groupes avec données apparemment contradictoires selon regroupement. Analyse conditionnelle.

**Exercice 58** – Chaîne Markov simple [ Correction ]

États A et B. Transitions :  $P(A \rightarrow B) = 0,3$ ,  $P(B \rightarrow A) = 0,4$ . Probabilité état au temps 2 ?

**Exercice 59** – Problème ouvert [ Correction ]

Concevoir une stratégie optimale dans un jeu utilisant probabilités conditionnelles.

**Exercice 60** – Modélisation réelle [ Correction ]

Cas réel : épidémie, marché financier ou processus industriel. Arbre décisionnel complet avec tous calculs.

## Planche 2 – Corrigé

Probabilités conditionnelles

Terminale Techno – Chapitre 5

### Correction 31 – Arbre à trois niveaux [Énoncé]

Arbre avec trois branches à la première étape (A, B, C), puis branches de satisfaction pour chacun.  
 $P(\text{Satisfait}) = P(A) \cdot P(S|A) + P(B) \cdot P(S|B) + P(C) \cdot P(S|C)$   
 $= 0,5 \times 0,7 + 0,3 \times 0,6 + 0,2 \times 0,8$   
 $= 0,35 + 0,18 + 0,16 = 0,69$

### Correction 32 – Événements dépendants [Énoncé]

$P(\text{Blanche}) = P(U1) \cdot P(B|U1) + P(U2) \cdot P(B|U2)$   
 $= \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{5}$   
 $= \frac{3}{10} + \frac{1}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

### Correction 33 – Test de contrôle [Énoncé]

Soit  $D$  : pièce défectueuse,  $T^+$  : test positif.  
 $P(D) = 0,02$ ,  $P(T^+|D) = 0,95$ ,  $P(T^+|\bar{D}) = 0,03$   
 $P(T^+) = 0,02 \times 0,95 + 0,98 \times 0,03 = 0,019 + 0,0294 = 0,0484$   
 $P(D|T^+) = \frac{0,019}{0,0484} \approx 0,393$  ou 39,3%

### Correction 34 – Trois étapes [Énoncé]

Les trois relais sont indépendants.  
 $P(\text{Intact}) = 0,9^3 = 0,729$

### Correction 35 – Branches multiples [Énoncé]

$P(\text{Réussir}) = P(\text{Étude}) \cdot P(R|E) + P(\bar{E}) \cdot P(R|\bar{E})$   
 $= 0,4 \times 0,6 + 0,6 \times 0,2 = 0,24 + 0,12 = 0,36$

### Correction 36 – Trois partitions [Énoncé]

$P(\text{Prime}) = 0,5 \times 0,8 + 0,3 \times 0,5 + 0,2 \times 0,4$   
 $= 0,4 + 0,15 + 0,08 = 0,63$  soit 63%

### Correction 37 – Loi totale [Énoncé]

$P(\text{Défaut}) = 0,4 \times 0,02 + 0,35 \times 0,03 + 0,25 \times 0,015$   
 $= 0,008 + 0,0105 + 0,00375 = 0,02225$  soit 2,225%

### Correction 38 – Partition inégale [Énoncé]

$P(A|D) = \frac{P(D|A) \cdot P(A)}{P(D)}$   
 $P(D) = 0,6 \times 0,03 + 0,4 \times 0,02 = 0,018 + 0,008 = 0,026$   
 $P(A|D) = \frac{0,018}{0,026} = \frac{18}{26} = \frac{9}{13} \approx 0,692$

### Correction 39 – Quatre branches [Énoncé]

Avec quatre critères  $C1, C2, C3, C4$  et leurs complémentaires, appliquer :  
 $P(\text{Spam}) = \sum_i P(C_i) \cdot P(\text{Spam}|C_i)$  selon la partition.  
 (Les valeurs dépendent des données spécifiques du problème)

### Correction 40 – Inversion de Bayes [Énoncé]

Sensibilité =  $P(+|M) = 0,99$ , Spécificité =  $P(-|\bar{M}) = 0,95$   
 $P(M) = 0,001$ , donc  $P(\bar{M}) = 0,999$   
 $P(+)= 0,001 \times 0,99 + 0,999 \times 0,05 = 0,00099 + 0,04995 = 0,05094$

$P(M|+) = \frac{0,00099}{0,05094} \approx 0,0194$  soit 1,94%

### Correction 41 – Test indépendance [Énoncé]

A et B indépendants si  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$   
 $P(A) \cdot P(B) = 0,4 \times 0,5 = 0,2 = P(A \cap B) \boxtimes$   
 Oui, A et B sont indépendants.

### Correction 42 – Indépendance conditionnelle [Énoncé]

$P(A) \cdot P(B) = 0,3 \times 0,5 = 0,15 = P(A \cap B) \boxtimes$   
 Les événements A et B sont indépendants.

### Correction 43 – Trois événements [Énoncé]

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$   
 $= 3 \times 0,5 - 3 \times 0,25 + 0,125 = 1,5 - 0,75 + 0,125 = 0,875$

### Correction 44 – Indépendance deux à deux [Énoncé]

Exemple : lancer deux dés. A : premier dé impair, B : deuxième dé impair, C : somme impaire.  
 $P(A \cap B) = 0,25 = P(A) \cdot P(B) \boxtimes$   
 $P(A \cap C) = 0,25 = P(A) \cdot P(C) \boxtimes$   
 Mais  $P(A \cap B \cap C) = 0 \neq P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = 0,125$

### Correction 45 – Application pratique [Énoncé]

Les deux systèmes sont indépendants.  
 $P(\text{Deux fonctionnent}) = 0,99 \times 0,99 = 0,9801$  soit 98,01%

**Correction 46** – Diagnostic médical [ Énoncé ]

$$P(M) = 0,005, P(+|M) = 0,97, P(+|\bar{M}) = 0,02$$

$$P(+) = 0,005 \times 0,97 + 0,995 \times 0,02 = 0,00485 + 0,0199 = 0,02475$$

$$VPP = P(M|+) = \frac{0,00485}{0,02475} \approx 0,196 \text{ soit } 19,6\%$$

**Correction 47** – Contrôle qualité [ Énoncé ]

Erreur : accepter mauvaise ou rejeter bonne.

$$P(\text{Accepter mauvaise}) = 0,05 \times (1 - 0,96) = 0,05 \times 0,04 = 0,002$$

$$P(\text{Rejeter bonne}) = 0,95 \times (1 - 0,98) = 0,95 \times 0,02 = 0,019$$

Taux d'erreur =  $0,002 + 0,019 = 0,021$  soit 2,1%

**Correction 48** – Assurance auto [ Énoncé ]

$$P(\text{Sinistre}) = 0,3 \times 0,15 + 0,7 \times 0,08$$

$$= 0,045 + 0,056 = 0,101 \text{ soit } 10,1\%$$

**Correction 49** – Fiabilité système [ Énoncé ]

Composantes en série : fiabilité globale = produit des fiabilités.

$$P(\text{Fonctionner}) = 0,9 \times 0,92 \times 0,88 = 0,73296 \text{ soit } 73,3\%$$

**Correction 50** – Épidémiologie [ Énoncé ]

$$P(\text{Au moins un}) = 1 - P(\text{Aucun})$$

$$= 1 - (1 - 0,4)(1 - 0,3)(1 - 0,2) = 1 - 0,6 \times 0,7 \times 0,8$$

$$= 1 - 0,336 = 0,664 \text{ soit } 66,4\%$$

**Correction 51** – BAC exercice complet [ Énoncé ]

$$1) P(\text{Réussite}) = 0,6 \times 0,8 + 0,4 \times 0,7 = 0,48 + 0,28 = 0,76$$

$$2) P(\text{Sci}|\text{Réussi}) = \frac{0,48}{0,76} = \frac{48}{76} = \frac{12}{19} \approx 0,632$$

**Correction 52** – BAC arbre large [ Énoncé ]

Construire un arbre à trois niveaux : villes (×3) puis usines (selon le contexte), puis articles. Appliquer probabilité totale et formule de Bayes pour les calculs demandés.

**Correction 53** – BAC Bayes [ Énoncé ]

Donner les probabilités a priori  $P(H_i)$  et vraisemblances  $P(X|H_i)$ .

Calculer  $P(H_i|X) = \frac{P(X|H_i) \cdot P(H_i)}{P(X)}$  avec  $P(X) = \sum_j P(X|H_j) \cdot P(H_j)$ .

L'hypothèse la plus probable a posteriori augmente selon ses vraisemblances.

**Correction 54** – BAC synthèse [ Énoncé ]

Données : occupations initiales  $P(\text{Salle}_i)$ , temps d'arrivée  $P(\text{Tard}|\text{Salle}_i)$ .

Appliquer Bayes :  $P(\text{Salle}_i|\text{Tard}) = \frac{P(\text{Tard}|\text{Salle}_i) \cdot P(\text{Salle}_i)}{P(\text{Tard})}$

**Correction 55** – BAC vrai/faux justifiés [ Énoncé ]

Affirmations typiques :

1. Indépendance  $\Rightarrow$  probabilités conditionnelles égales aux marginales. ☒
2.  $P(A|B) = P(B|A)$  en général. ×
3. Formule de Bayes nécessite partition. ☒
4. Arbre visualise mieux que tabulation. (Dépend du contexte)
5. VPP dépend de la prévalence. ☒

**Correction 56** – Combinaison concepts [ Énoncé ]

Arbre avec  $2^3 = 8$  feuilles pour trois épreuves doublées. Calculs de chemins possibles, probabilités totales selon regroupements, indépendance si pertinent.

**Correction 57** – Paradoxe de Simpson [ Énoncé ]

Montrer qu'une tendance observée globalement peut s'inverser au sein des sous-groupes. Résolution : reconnaître que probabilité conditionnelle par groupe prime sur la proportion marginale.

**Correction 58** – Chaîne Markov simple [ Énoncé ]

$$\text{Matrice transition : } \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$$

$$\text{État temps 1 : } P(A_1) = 0,7 \cdot P(A_0) + 0,4 \cdot P(B_0)$$

État temps 2 : appliquer transition à nouveau. (Dépend de  $P(A_0), P(B_0)$  initiaux)

**Correction 59** – Problème ouvert [ Énoncé ]

Réponse variable selon le jeu. Exemple : jeu des trois portes (Monty Hall). Appliquer probabilités conditionnelles pour montrer que changer de porte améliore chances (de  $1/3$  à  $2/3$ ).

**Correction 60** – Modélisation réelle [ Énoncé ]

Exemple épidémie : états S (susceptible), I (infecté), R (rétabli). Paramètres : taux transmission, taux guérison. Construire arbre décisionnel multi-étapes. Calculer probabilités d'évolution, estimer risques, recommander stratégies selon résultats.