

Planche d'exercices n°1

Probabilités conditionnelles

Terminale Techno – Chapitre 5

Exercice 1 – Calcul direct [Correction]

On sait que $P(A) = 0,6$, $P(B) = 0,4$ et $P(A \cap B) = 0,2$. Calculer $P_A(B)$.

Exercice 2 – Calcul direct [Correction]

Soit $P(X) = 0,3$, $P(Y) = 0,5$ et $P(X \cap Y) = 0,15$. Déterminer $P_X(Y)$.

Exercice 3 – Calcul direct [Correction]

On dispose de $P(S) = 0,8$ et $P(S \cap T) = 0,56$. Calculer $P_S(T)$.

Exercice 4 – Calcul direct [Correction]

Sachant que $P(M) = 0,7$ et $P_M(N) = 0,5$, trouver $P(M \cap N)$.

Exercice 5 – Calcul direct [Correction]

Un événement A a une probabilité 0,4. Sachant que $P_A(B) = 0,75$, déterminer $P(A \cap B)$.

Exercice 6 – Tableau croisé [Correction]

On interroge 300 personnes sur deux critères. Le tableau donne :

	Oui	Non	Total
Femme	80	70	150
Homme	90	60	150
Total	170	130	300

Calculer la probabilité qu'une personne réponde « Oui » sachant qu'elle est une femme.

Exercice 7 – Tableau croisé [Correction]

On dispose d'un effectif de 200 objets défectueux ou non, issus de deux usines :

	Défectueux	OK	Total
Usine A	12	88	100
Usine B	20	80	100
Total	32	168	200

Quelle est la probabilité qu'un objet soit défectueux sachant qu'il vient de l'usine B ?

Exercice 8 – Tableau croisé [Correction]

Dans un lycée, on classe les élèves selon le diplôme et le sexe :

	Bac général	Bac techno	Total
Filles	120	80	200
Garçons	100	100	200
Total	220	180	400

Calculer $P_{\text{Fille}}(\text{Bac techno})$.

Exercice 9 – Tableau croisé [Correction]

Une enquête classe les clients selon le type d'achat et la fidélité :

	Fidèle	Non fidèle	Total
Achat important	75	25	100
Achat faible	30	70	100
Total	105	95	200

Quelle est la probabilité qu'un client soit fidèle sachant qu'il a un achat important ?

Exercice 10 – Tableau croisé [Correction]

On surveille la réussite en fonction de l'assiduité :

	Réussi	Échoué	Total
Assidu	90	10	100
Absentéiste	30	70	100
Total	120	80	200

Calculer $P_{\text{Assidu}}(\text{Réussi})$ et $P_{\text{Absentéiste}}(\text{Réussi})$.

Exercice 11 – Arbre simple [Correction]

On lance un dé équilibré, puis selon le résultat on tire une boule d'une urne. Construire un arbre pondéré où :

- Le dé donne 1, 2, 3 avec probabilité $\frac{1}{6}$ chacun
- Pour le résultat 1, on tire une boule rouge (prob. 0,7) ou blanche (prob. 0,3)

Exercice 12 – Arbre simple [Correction]

Un test a une fiabilité de 95% si la maladie est présente, et de 98% si elle est absente. La maladie touche 10% de la population. Construire l'arbre pondéré des résultats de test.

Exercice 13 – Arbre simple [Correction]

On sélectionne un client au hasard. La probabilité qu'il achète le produit A est 0,6. S'il achète A, il achète B avec probabilité 0,4. Sinon, il achète B avec probabilité 0,2. Construire l'arbre.

Exercice 14 – Arbre simple [Correction]

Une urne contient 3 boules blanches et 2 noires. On tire sans remise deux boules. Tracer l'arbre pondéré et calculer la probabilité d'obtenir 2 boules blanches.

Exercice 15 – Arbre simple [Correction]

On lance deux fois une pièce. Construire l'arbre pondéré et énumérer tous les chemins.

Exercice 16 – Probabilités totales [Correction]

Soit A et \bar{A} une partition de l'univers, avec $P(A) = 0,3$, $P_A(B) = 0,8$ et $P_{\bar{A}}(B) = 0,4$. Calculer $P(B)$.

Exercice 17 – Probabilités totales [Correction]

On dispose : $P(D) = 0,4$, $P_D(E) = 0,6$, $P_{\bar{D}}(E) = 0,2$. Déterminer $P(E)$ par la formule des probabilités totales.

Exercice 18 – Probabilités totales [Correction]

Un magasin reçoit des articles de deux fournisseurs : 60% du fournisseur A et 40% du fournisseur B. Le taux de défaut est 2% pour A et 5% pour B. Trouver la probabilité qu'un article soit défectueux.

Exercice 19 – Probabilités totales [Correction]

Trois routes mènent à une destination. Les probabilités de les emprunter sont 0,5, 0,3 et 0,2. Les probabilités d'arriver à l'heure sont 0,8, 0,6 et 0,9 respectivement. Calculer la probabilité d'arriver à l'heure.

Exercice 20 – Probabilités totales [Correction]

Un événement F peut provenir de deux causes C_1 et C_2 mutuellement exclusives avec $P(C_1) = 0,7$, $P(C_2) = 0,3$. On a $P_{C_1}(F) = 0,5$ et $P_{C_2}(F) = 0,9$. Trouver $P(F)$.

Exercice 21 – Indépendance [Correction]

Les événements A et B sont-ils indépendants sachant que $P(A) = 0,4$, $P(B) = 0,5$ et $P(A \cap B) = 0,2$?

Exercice 22 – Indépendance [Correction]

On sait que $P(X) = 0,6$, $P(Y) = 0,3$ et $P_X(Y) = 0,3$. Vérifier si X et Y sont indépendants.

Exercice 23 – Indépendance [Correction]

Déterminer $P(A \cap B)$ si A et B sont indépendants avec $P(A) = 0,2$ et $P(B) = 0,7$.

Exercice 24 – Indépendance [Correction]

On lance deux dés successifs. Montrer que l'événement « le premier dé donne un nombre pair » est indépendant de « le second dé donne un 6 ».

Exercice 25 – Indépendance [Correction]

Deux événements M et N sont indépendants avec $P(M) = 0,5$ et $P_M(N) = 0,6$. Que vaut $P(N)$?

Exercice 26 – Application [Correction]

Un atelier fabrique des pièces. Le contrôle détecte un défaut avec probabilité 0,95 s'il existe et avec probabilité 0,1 s'il n'existe pas. Sachant que 3% des pièces sont défectueuses, calculer la probabilité qu'une pièce déclarée défectueuse le soit réellement.

Exercice 27 – Application [Correction]

Dans une population, 15% des individus ont la maladie M . Un test positif a lieu avec probabilité 0,9 si M est présente, et 0,05 sinon. Trouver la probabilité que M soit présente sachant que le test est positif.

Exercice 28 – Application [Correction]

Un livreur choisit entre trois itinéraires : A (prob. 0,5, délai 30 min), B (prob. 0,3, délai 45 min), C (prob. 0,2, délai 60 min). Calculer le délai moyen.

Exercice 29 – Application [Correction]

Une usine produit 1000 articles par jour : 700 de type I, 300 de type II. Le taux de défaut est 1% pour le type I et 3% pour le type II. Combien d'articles défectueux en moyenne chaque jour?

Exercice 30 – Problème synthèse [Correction]

Un client va dans un magasin. Il achète un article

de marque A avec probabilité 0,4 ou de marque B avec probabilité 0,6. S'il choisit A, il revient avec probabilité 0,8; s'il choisit B, il revient avec pro-

babilité 0,6. Sachant qu'un client revient, quelle est la probabilité qu'il ait d'abord acheté A ?

Planche 1 – Corrigé

Probabilités conditionnelles

Terminale Techno – Chapitre 5

Correction 1 – Calcul direct [Énoncé]

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,2}{0,6} = \frac{1}{3} \approx 0,333$$

Correction 2 – Calcul direct [Énoncé]

$$P_X(Y) = \frac{P(X \cap Y)}{P(X)} = \frac{0,15}{0,3} = 0,5$$

Correction 3 – Calcul direct [Énoncé]

$$P_S(T) = \frac{P(S \cap T)}{P(S)} = \frac{0,56}{0,8} = 0,7$$

Correction 4 – Calcul direct [Énoncé]

$$P(M \cap N) = P(M) \times P_M(N) = 0,7 \times 0,5 = 0,35$$

Correction 5 – Calcul direct [Énoncé]

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = 0,4 \times 0,75 = 0,3$$

Correction 6 – Tableau croisé [Énoncé]

Probabilité que la réponse soit « Oui » sachant que c'est une femme :

$$P_{\text{Femme}}(\text{Oui}) = \frac{80}{150} = \frac{8}{15} \approx 0,533$$

Correction 7 – Tableau croisé [Énoncé]

Probabilité qu'un objet soit défectueux sachant qu'il

vient de l'usine B :

$$P_B(\text{Défectueux}) = \frac{20}{100} = 0,2$$

Correction 8 – Tableau croisé [Énoncé]

$$P_{\text{Fille}}(\text{Bac techno}) = \frac{80}{200} = \frac{2}{5} = 0,4$$

Correction 9 – Tableau croisé [Énoncé]

$$P_{\text{Important}}(\text{Fidèle}) = \frac{75}{100} = 0,75$$

Correction 10 – Tableau croisé [Énoncé]

$$P_{\text{Assidu}}(\text{Réussi}) = \frac{90}{100} = 0,9$$

$$P_{\text{Absentéiste}}(\text{Réussi}) = \frac{30}{100} = 0,3$$

Correction 11 – Arbre simple [Énoncé]

Arbre à deux niveaux : dé (1, 2, 3 à $\frac{1}{6}$ chacun) puis couleur (0,7 rouge, 0,3 blanc pour la branche 1).

Chemins : (1, rouge) à prob. $\frac{1}{6} \times 0,7$, (1, blanc) à $\frac{1}{6} \times 0,3$, etc.

Correction 12 – Arbre simple [Énoncé]

Arbre à deux niveaux : maladie présente (0,1) ou absente (0,9), puis test positif ou négatif avec les fiabilités données.

Correction 13 – Arbre simple [Énoncé]

Premier niveau : A (0,6) ou non A (0,4). Deuxième : B|A (0,4), B|non-A (0,2).

Chemins : (A, B) prob. 0,24, (A, non-B) prob. 0,36, etc.

Correction 14 – Arbre simple [Énoncé]

Premier tirage : 3 blanches sur 5. Deuxième : 2 blanches sur 4 si blanche tirée.

$$P(BB) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10} = 0,3$$

Correction 15 – Arbre simple [Énoncé]

Deux niveaux, chaque branche à prob. 0,5. Chemins : PP, PF, FP, FF chacun à 0,25.

Correction 16 – Probabilités totales [Énoncé]

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A) \cdot P_A(B) + P(\bar{A}) \cdot P_{\bar{A}}(B) \\ &= 0,3 \times 0,8 + 0,7 \times 0,4 = 0,24 + 0,28 = 0,52 \end{aligned}$$

Correction 17 – Probabilités totales [Énoncé]

$$P(E) = P(D) \cdot P_D(E) + P(\bar{D}) \cdot P_{\bar{D}}(E)$$

$$= 0,4 \times 0,6 + 0,6 \times 0,2 = 0,24 + 0,12 = 0,36$$

Correction 18 – Probabilités totales [Énoncé]

$$\begin{aligned} P(\text{Défaut}) &= 0,6 \times 0,02 + 0,4 \times 0,05 \\ &= 0,012 + 0,02 = 0,032 = 3,2\% \end{aligned}$$

Correction 19 – Probabilités totales [Énoncé]

$$\begin{aligned} P(\text{Heure}) &= 0,5 \times 0,8 + 0,3 \times 0,6 + 0,2 \times 0,9 \\ &= 0,4 + 0,18 + 0,18 = 0,76 \end{aligned}$$

Correction 20 – Probabilités totales [Énoncé]

$$\begin{aligned} P(F) &= P(C_1) \cdot P_{C_1}(F) + P(C_2) \cdot P_{C_2}(F) \\ &= 0,7 \times 0,5 + 0,3 \times 0,9 = 0,35 + 0,27 = 0,62 \end{aligned}$$

Correction 21 – Indépendance [Énoncé]

$$\text{Vérification : } P(A) \times P(B) = 0,4 \times 0,5 = 0,2 = P(A \cap B).$$

Oui, A et B sont indépendants.

Correction 22 – Indépendance [Énoncé]

Si indépendants : $P_X(Y) = P(Y) = 0,3$. On a $P_X(Y) = 0,3$, donc ils sont indépendants.

Correction 23 – Indépendance [Énoncé]

Si indépendants : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0,2 \times 0,7 = 0,14$

Correction 24 – Indépendance [Énoncé]

Événement 1 : premier dé pair, prob. $\frac{1}{2}$.

Événement 2 : second dé = 6, prob. $\frac{1}{6}$.

Intersection : prob. $\frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$.

Vérification : $\frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$. Indépendants.

Correction 25 – Indépendance [Énoncé]

Si indépendants : $P_M(N) = P(N)$, donc $P(N) = 0,6$

Correction 26 – Application [Énoncé]

Bayesian : $P(\text{réellement défect} \mid \text{déclaré défect})$

$$= \frac{P(\text{déclaré} \mid \text{réellement}) \times P(\text{réellement})}{P(\text{déclaré})}$$

$$P(\text{déclaré}) = 0,95 \times 0,03 + 0,1 \times 0,97 = 0,0285 + 0,097 = 0,1255$$

$$= \frac{0,95 \times 0,03}{0,1255} \approx 0,227$$

Correction 27 – Application [Énoncé]

$$\begin{aligned} P(M \mid +) &= \frac{0,9 \times 0,15}{0,9 \times 0,15 + 0,05 \times 0,85} \\ &= \frac{0,135}{0,135 + 0,0425} = \frac{0,135}{0,1775} \approx 0,761 \end{aligned}$$

Correction 28 – Application [Énoncé]

Délai moyen :

$$\begin{aligned} E &= 0,5 \times 30 + 0,3 \times 45 + 0,2 \times 60 \\ &= 15 + 13,5 + 12 = 40,5 \text{ min} \end{aligned}$$

Correction 29 – Application [Énoncé]

Type I : $700 \times 0,01 = 7$ défectueux

Type II : $300 \times 0,03 = 9$ défectueux

Total : $7 + 9 = 16$ articles défectueux par jour

Correction 30 – Problème synthèse [Énoncé]

$$P(\text{revient}) = 0,4 \times 0,8 + 0,6 \times 0,6 = 0,32 + 0,36 = 0,68$$

$$P(A \mid \text{revient}) = \frac{0,32}{0,68} = \frac{8}{17} \approx 0,471$$