DS Blanc n°2

Probabilités conditionnelles

Terminale Techno — Chapitre 5

Exercice 1 — Partition triple (7 points) [Correction]

Une pizzeria reçoit des livraisons de tomates de trois fournisseurs :

— Fournisseur A : 50% des livraisons, qualité acceptable avec proba 0,95
— Fournisseur B : 30% des livraisons, qualité acceptable avec proba 0,88
— Fournisseur C : 20% des livraisons, qualité acceptable avec proba 0,80

On inspecte une livraison au hasard.

1. Construire un arbre pondéré complet (partition en 3 branches).
2. Calculer la probabilité que la livraison soit acceptable.
3. Calculer la probabilité que la livraison provienne de B sachant qu'elle n'est pas acceptable.
4. Un client refuse une livraison non acceptable. Qu'elle fournisseur est le plus susceptible d'avoir fourni cette mauvaise qualité ?

Exercice 2 — Dépistage complet (6 points) [Correction]

Un laboratoire développe un nouveau test pour une maladie rare affectant 0,5% de la population.
Tests de fiabilité :

— Sensibilité : $P(+|M) = 0{,}98$ (détecte bien les malades)
— Spécificité : $P(-|\overline{M}) = 0{,}99$ (reconnaît bien les sains)

1. Une personne est testée positive. Quelle est la probabilité qu'elle soit réellement malade ?
2. Calculer la probabilité d'un faux positif : $P(\overline{M} \cap +)$.
3. Interpréter : y a-t-il plus de vrais positifs ou de faux positifs ?

Exercice 3 — Deux tirages (4 points) [Correction]

On effectue deux tirages successifs sans remise d'une carte dans un jeu de 52 cartes.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir deux cœurs ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un as ?
3. Sont-ce deux événements indépendants ?

Exercice 4 — Question bonus (3 points) [Correction]

On suppose trois événements A, B, C indépendants deux à deux avec $P(A) = 0{,}4$, $P(B) = 0{,}3$, $P(C) = 0{,}5$.
Calculer $P(A \cap B \cap C)$ et $P(A \cup B \cup C)$.

Corrigé — DS Blanc n°2

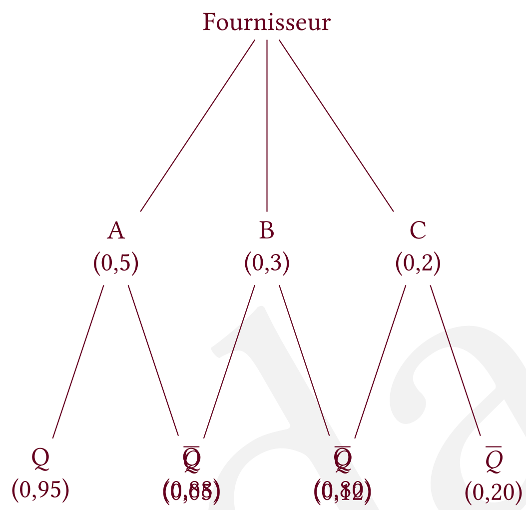
Probabilités conditionnelles

Terminale Techno — Chapitre 5

Correction 1 — Partition triple () [Énoncé]

Notons A, B, C les fournisseurs et Q : « qualité acceptable ».

1. Arbre pondéré (partition triple) :



2. Probabilité de qualité acceptable (formule des probabilités totales) :

$$\begin{aligned} P(Q) &= P(A)\times P_A(Q) + P(B)\times P_B(Q) + P(C)\times P_C(Q) \\ &= 0{,}5\times 0{,}95 + 0{,}3\times 0{,}88 + 0{,}2\times 0{,}80 \\ &= 0{,}475 + 0{,}264 + 0{,}160 \\ &= 0{,}899 \end{aligned}$$

3. Probabilité (B | qualité non acceptable) :

D'abord : $P(\overline{Q}) = 1 - 0{,}899 = 0{,}101$

$$P(B\cap\overline{Q}) = 0{,}3\times 0{,}12 = 0{,}036$$

$$P_{\overline{Q}}(B) = \frac{P(B\cap\overline{Q})}{P(\overline{Q})} = \frac{0{,}036}{0{,}101} \approx 0{,}356$$

4. Fournisseur le plus susceptible pour mauvaise qualité :

Calculons toutes les probabilités conditionnelles :

$$P_{\overline{Q}}(A) = \frac{0{,}5\times 0{,}05}{0{,}101} = \frac{0{,}025}{0{,}101} \approx 0{,}248$$

$$P_{\overline{Q}}(B) \approx 0{,}356$$

$$P_{\overline{Q}}(C) = \frac{0{,}2\times 0{,}20}{0{,}101} = \frac{0{,}040}{0{,}101} \approx 0{,}396$$

Le fournisseur C est le plus susceptible (39,6%).

Correction 2 — Dépistage complet () [Énoncé]

Données : $P(M) = 0{,}005$, $P_M(+) = 0{,}98$, $P_{\overline{M}}(-) = 0{,}99$ donc $P_{\overline{M}}(+) = 0{,}01$.

1. Probabilité d'être malade sachant test positif (Bayes) :

$$\begin{aligned} P(+) &= P(M) \times P_M(+) + P(\overline{M}) \times P_{\overline{M}}(+) \\ &= 0{,}005 \times 0{,}98 + 0{,}995 \times 0{,}01 \\ &= 0{,}0049 + 0{,}00995 = 0{,}01485 \end{aligned}$$

$$P_+(M) = \frac{P(M) \times P_M(+)}{P(+)} = \frac{0{,}0049}{0{,}01485} \approx 0{,}330$$

La probabilité d'être réellement malade est environ **33%**.

2. Probabilité d'un faux positif :

$$P(\overline{M} \cap +) = P(\overline{M}) \times P_{\overline{M}}(+) = 0{,}995 \times 0{,}01 = 0{,}00995$$

3. Comparaison vrais/faux positifs :

Vrais positifs : $P(M \cap +) = 0{,}0049$

Faux positifs : $P(\overline{M} \cap +) = 0{,}00995$

Il y a environ 2 fois plus de faux positifs que de vrais positifs, ce qui rend le test problématique pour cette maladie rare.

Correction 3 — Deux tirages () [Énoncé]

1. Probabilité de deux cœurs :

Premier tirage : $\frac{13}{52}$

Deuxième tirage (sans remise) : $\frac{12}{51}$

$$P(\text{deux cœurs}) = \frac{13}{52} \times \frac{12}{51} = \frac{13 \times 12}{52 \times 51} = \frac{156}{2652} = \frac{1}{17} \approx 0{,}059$$

2. Probabilité d'au moins un as :

Événement contraire : « aucun as ».

Premier tirage : $\frac{48}{52}$, deuxième tirage : $\frac{47}{51}$

$$P(\text{aucun as}) = \frac{48}{52} \times \frac{47}{51} = \frac{2256}{2652} = \frac{188}{221}$$

$$P(\text{au moins un as}) = 1 - \frac{188}{221} = \frac{33}{221} \approx 0{,}149$$

3. Indépendance :

Les deux tirages ne sont pas indépendants car il n'y a pas remise. La composition du jeu change après le premier tirage.

Correction 4 — Question bonus () [Énoncé]

A, B, C indépendants deux à deux : $P(A) = 0{,}4$, $P(B) = 0{,}3$, $P(C) = 0{,}5$.

Calcul de $P(A \cap B \cap C)$:

Si trois événements sont indépendants deux à deux, alors :

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B) \times P(C) = 0{,}4 \times 0{,}3 \times 0{,}5 = 0{,}06$$

Calcul de $P(A \cup B \cup C)$:

Utilisons le complément :

$$P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = P(\overline{A}) \times P(\overline{B}) \times P(\overline{C}) = 0{,}6 \times 0{,}7 \times 0{,}5 = 0{,}21$$

$$P(A \cup B \cup C) = 1 - 0{,}21 = 0{,}79$$