DS Blanc n°1

Probabilités conditionnelles

Terminale Techno — Chapitre 5

Exercice 1 — Automatismes (2h — 20 points) [Correction]

Répondre rapidement sans calculatrice.

N°	Question	Réponse
1	$P(A) = 0{,}6$ et $P(B) = 0{,}4$. Que vaut $P(\overline{A})$?	
2	$P(A \cap B) = 0{,}24$. Que vaut $P(A \cup B)$ si $P(A) + P(B) = 0{,}8$?	
3	$P_A(B) = 0{,}3$. Si $P(A) = 0{,}5$, que vaut $P(A \cap B)$?	
4	Dans une urne : 3 rouges, 2 bleus. Proba de tirer rouge ?	
5	$P(A) = 0{,}8$, $P_A(C) = 0{,}5$. Que vaut $P(A \cap C)$?	
6	Deux événements indépendants : $P(A) = 0{,}2$, $P(B) = 0{,}6$. Que vaut $P(A \cap B)$?	
7	$P(A) = 0{,}5$, $P(B) = 0{,}4$, $P(A \cap B) = 0{,}1$. Que vaut $P(A \cup B)$?	
8	Arbre avec branches : 0,7 puis 0,3. Proba du chemin complet ?	
9	$P_{\overline{A}}(B) = 0{,}6$ et $P(\overline{A}) = 0{,}4$. Que vaut $P(\overline{A} \cap B)$?	
10	Formule des probabilités totales : $P(B) = P(A) \times ... + P(\overline{A}) \times ...$	

Exercice 2 — Arbre pondéré (6 points) [Correction]

Une entreprise fabrique des pièces. 80% proviennent de l'usine A, 20% de l'usine B. L'usine A produit 5% de pièces défectueuses, l'usine B en produit 3%.

On prélève une pièce au hasard.

1. Construire un arbre pondéré de cette situation.
2. Calculer la probabilité que la pièce provienne de A et soit défectueuse.
3. Calculer la probabilité qu'une pièce soit défectueuse.
4. Sachant qu'une pièce est défectueuse, quelle est la probabilité qu'elle provienne de B ?

Exercice 3 — Indépendance (5 points) [Correction]

On considère deux événements A et B tels que :

$$P(A) = 0{,}6 \quad P(B) = 0{,}5 \quad P(A \cap B) = 0{,}3$$

1. Les événements A et B sont-ils indépendants ? Justifier.
2. Calculer $P_A(B)$ et comparer avec $P(B)$.
3. Calculer $P(A \cup B)$.

Exercice 4 — Problème synthèse (9 points) [Correction]

Un test de dépistage d'une maladie présente les caractéristiques suivantes :

— La maladie touche 2% de la population.
— Si une personne est malade, le test est positif avec une probabilité de 95%.
— Si une personne est saine, le test est négatif avec une probabilité de 90%.

On choisit une personne au hasard et on effectue le test.

1. Construire un arbre pondéré complet.

2. Calculer la probabilité que le test soit positif.
3. Calculer la probabilité qu'une personne soit malade sachant que son test est positif.
4. Interpréter ce résultat. Le test est-il fiable pour le dépistage ?

Corrigé — DS Blanc n°1

Probabilités conditionnelles

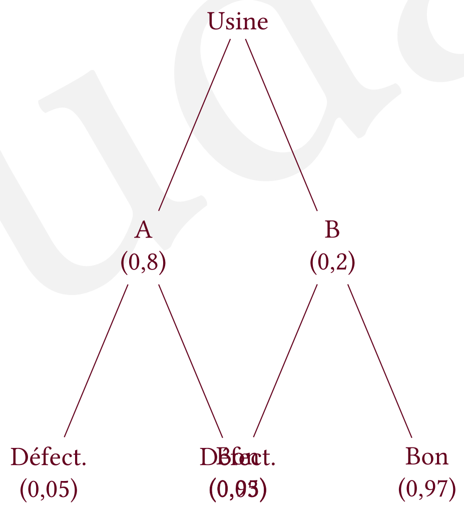
Terminale Techno — Chapitre 5

Correction 1 — Automatismes () [Énoncé]

N°	Question	Réponse
1	$P(A) = 0{,}6$. Que vaut $P(\overline{A})$?	0,4
2	$P(A \cup B) = 0{,}8 - 0{,}24 = 0{,}56$	0,56
3	$P(A \cap B) = 0{,}5 \times 0{,}3 = 0{,}15$	0,15
4	$\frac{3}{5} = 0{,}6$	0,6
5	$P(A \cap C) = 0{,}8 \times 0{,}5 = 0{,}4$	0,4
6	$P(A \cap B) = 0{,}2 \times 0{,}6 = 0{,}12$	0,12
7	$P(A \cup B) = 0{,}5 + 0{,}4 - 0{,}1 = 0{,}8$	0,8
8	$0{,}7 \times 0{,}3 = 0{,}21$	0,21
9	$P(\overline{A} \cap B) = 0{,}4 \times 0{,}6 = 0{,}24$	0,24
10	$P(B) = P(A) \times P_A(B) + P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(B)$	

Correction 2 — Arbre pondéré () [Énoncé]

1. Arbre pondéré :



2. Probabilité (A et défectueuse) :

$$P(A \cap D) = P(A) \times P_A(D) = 0{,}8 \times 0{,}05 = 0{,}04$$

3. Probabilité de défectueuse (formule des probabilités totales) :

$$P(D) = P(A) \times P_A(D) + P(B) \times P_B(D) = 0{,}04 + 0{,}2 \times 0{,}03 = 0{,}04 + 0{,}006 = 0{,}046$$

4. Probabilité (B | défectueuse) :

$$P_D(B) = \frac{P(B \cap D)}{P(D)} = \frac{0{,}006}{0{,}046} = \frac{6}{46} = \frac{3}{23} \approx 0{,}13$$

Correction 3 — Indépendance () [Énoncé]

1. Vérification d'indépendance :

Pour que A et B soient indépendants, il faut : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.
Calculons : $P(A) \times P(B) = 0{,}6 \times 0{,}5 = 0{,}3$
Or $P(A \cap B) = 0{,}3$, donc **A et B sont indépendants**.
2. Calcul de $P_A(B)$:

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0{,}3}{0{,}6} = 0{,}5 = P(B)$$

Cela confirme l'indépendance (la probabilité de B ne change pas sachant A).
3. Calcul de $P(A \cup B)$:

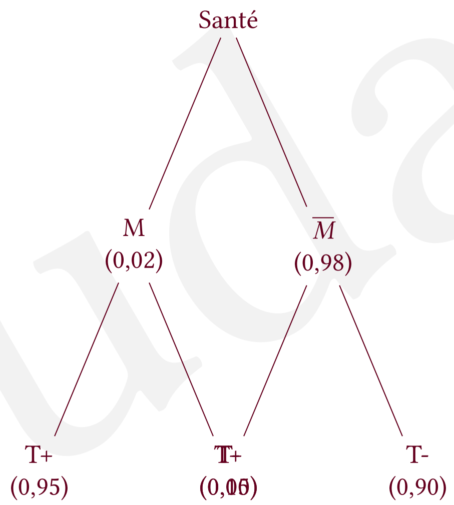
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}6 + 0{,}5 - 0{,}3 = 0{,}8$$

Correction 4 — Problème synthèse () [Énoncé]

Notons M : « personne malade », T+ : « test positif ».
Données :

- $P(M) = 0{,}02$
- $P_M(T+) = 0{,}95$
- $P_{\overline{M}}(T-) = 0{,}90$, donc $P_{\overline{M}}(T+) = 0{,}10$

1. Arbre pondéré complet :



2. Probabilité d'un test positif (formule des probabilités totales) :

$$P(T+) = P(M) \times P_M(T+) + P(\overline{M}) \times P_{\overline{M}}(T+)$$

$$P(T+) = 0{,}02 \times 0{,}95 + 0{,}98 \times 0{,}10 = 0{,}019 + 0{,}098 = 0{,}117$$

3. Probabilité d'être malade sachant test positif (formule de Bayes) :

$$P_{T+}(M) = \frac{P(M \cap T+)}{P(T+)} = \frac{P(M) \times P_M(T+)}{P(T+)} = \frac{0{,}019}{0{,}117} = \frac{19}{117} \approx 0{,}162$$

4. Interprétation :
Même avec un test positif, il n'y a que 16,2% de chances d'être réellement malade. Le test n'est **pas très fiable** pour le dépistage car beaucoup de faux positifs (personnes saines avec test positif).
En effet : $P(T + \cap \overline{M}) = 0{,}098$ (faux positifs) vs $P(T + \cap M) = 0{,}019$ (vrais positifs).