Chapitre 5 — Probabilités conditionnelles

Terminale Technologique • Tronc commun

Table des matières

PROGRAMME (BO — TERMINALE TECHNOLOGIQUE)

Contenus : Probabilité conditionnelle $P_A(B)$. Formule $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$. Indépendance de deux événements. Formule des probabilités totales. Arbre pondéré : lecture, construction, calculs.

Démonstrations : Aucune démonstration exigible.

Capacités : Calculer des probabilités conditionnelles. Construire et exploiter un arbre pondéré. Appliquer la formule des probabilités totales. Déterminer si deux événements sont indépendants. Utiliser un tableau croisé d'effectifs pour calculer des probabilités.

Tout le cours

Activités

Objectif : découvrir la notion de probabilité conditionnelle.

Dans un lycée de 500 élèves, 300 sont des filles. Parmi les filles, 180 pratiquent un sport. Parmi les garçons, 120 pratiquent un sport.

	Sportif	Non sportif	Total
Fille	180	120	300
Garçon	120	80	200
Total	300	200	500

1. On choisit un élève au hasard. Calculer la probabilité qu'il soit sportif.

2. On choisit un élève au hasard **parmi les filles**. Calculer la probabilité qu'il soit sportif.

3. Comparer les deux résultats. Expliquer la différence.

4. On note F l'événement "l'élève est une fille" et S "l'élève est sportif". Exprimer les résultats précédents avec les notations $P(S)$ et $P_F(S)$.

Correction. 1. $P(S) = \frac{300}{500} = 0,6$.
2. $P_F(S) = \frac{180}{300} = 0,6$.
3. Ici les deux valeurs sont égales. On restreint l'univers aux filles.
4. $P(S) = 0,6$ et $P_F(S) = \frac{P(F \cap S)}{P(F)} = \frac{180/500}{300/500} = \frac{180}{300} = 0,6$.

Objectif : construire et lire un arbre pondéré.

Un médecin sait que 2 % de la population est atteinte d'une maladie M. Un test de dépistage a les caractéristiques suivantes :

— Si le patient est malade, le test est positif dans 95 % des cas.

— Si le patient est sain, le test est positif dans 3 % des cas (faux positif).

1. Traduire les données sous forme de probabilités : $P(M)$, $P_M(T)$, $P_{\overline{M}}(T)$.

2. Construire l'arbre pondéré complet.

3. Calculer $P(M \cap T)$ et $P(\overline{M} \cap T)$.

4. En déduire $P(T)$ par la formule des probabilités totales.

Correction. 1. $P(M) = 0,02$, $P_M(T) = 0,95$, $P_{\overline{M}}(T) = 0,03$.
2. Arbre : M (0,02) se ramifie en T (0,95) et $\overline{T}$ (0,05) ; $\overline{M}$ (0,98) se ramifie en T (0,03) et $\overline{T}$ (0,97).
3. $P(M \cap T) = 0,02 \times 0,95 = 0,019$. $P(\overline{M} \cap T) = 0,98 \times 0,03 = 0,0294$.
4. $P(T) = 0,019 + 0,0294 = 0,0484$.

Objectif : déterminer si deux événements sont indépendants.

On lance un dé équilibré à six faces et on considère les événements :
— A : "obtenir un nombre pair" ;
— B : "obtenir un multiple de 3".

1. Calculer $P(A)$, $P(B)$ et $P(A \cap B)$.

2. Vérifier si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

3. Qu'en concluez-vous sur l'indépendance de A et B ?

4. Calculer $P_A(B)$ et comparer avec $P(B)$.

Correction. 1. $A = \{2; 4; 6\}$ donc $P(A) = \frac{1}{2}$. $B = \{3; 6\}$ donc $P(B) = \frac{1}{3}$. $A \cap B = \{6\}$ donc $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$.
2. $P(A) \times P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6} = P(A \cap B)$.
3. A et B sont indépendants.
4. $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3} = P(B)$. Cohérent.

ibrahim-rudasingwa.fr

1 Probabilités conditionnelles

1.1 Définition

Soit A et B deux événements avec $P(A) \neq 0$.
La **probabilité conditionnelle de B sachant A**, notée $P_A(B)$, est définie par :

$$\boxed{P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}$$

$P_A(B)$ représente la probabilité que B se réalise **sachant que A est réalisé**. On restreint l'univers à A.

1.2 Propriétés

Pour $P(A) \neq 0$:

1. $0 \leqslant P_A(B) \leqslant 1$
2. $P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B)$
3. $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$

Exemple. Dans une entreprise de 800 salariés :

	Cadre (C)	Non-cadre ($\overline{C}$)	Total
Femme (F)	120	280	400
Homme ($\overline{F}$)	180	220	400
Total	300	500	800

$P(F) = \frac{400}{800} = \frac{1}{2}$, $\quad P(F \cap C) = \frac{120}{800} = \frac{3}{20}$, $\quad P_F(C) = \frac{120}{400} = \frac{3}{10}$.

Exercice. Calculer $P_C(F)$ et $P_{\overline{F}}(C)$.

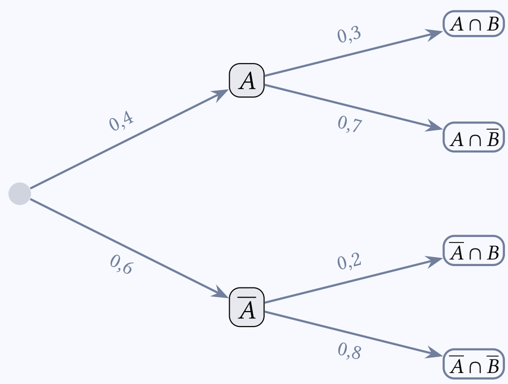
Correction. $P_C(F) = \frac{120}{300} = \frac{2}{5} = 0{,}4$. $\quad P_{\overline{F}}(C) = \frac{180}{400} = \frac{9}{20} = 0{,}45$.

2 Arbre pondéré et probabilités totales

2.1 Arbre pondéré

1. La somme des probabilités sur les branches issues d'un même nœud vaut **1**.
2. La probabilité d'un chemin (d'une feuille) est le **produit** des probabilités de ses branches.
3. $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$.

Exemple. On donne $P(A) = 0{,}4$, $P_A(B) = 0{,}3$, $P_{\overline{A}}(B) = 0{,}2$.



Calculs : $P(A \cap B) = 0{,}4 \times 0{,}3 = 0{,}12$, $P(A \cap \overline{B}) = 0{,}4 \times 0{,}7 = 0{,}28$,
$P(\overline{A} \cap B) = 0{,}6 \times 0{,}2 = 0{,}12$, $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}6 \times 0{,}8 = 0{,}48$.

Exercice. On donne $P(A) = 0{,}3$, $P_A(B) = 0{,}6$, $P_{\overline{A}}(B) = 0{,}1$. Construire l'arbre et calculer toutes les probabilités d'intersection.

Correction. $P(A \cap B) = 0{,}3 \times 0{,}6 = 0{,}18$, $P(A \cap \overline{B}) = 0{,}3 \times 0{,}4 = 0{,}12$, $P(\overline{A} \cap B) = 0{,}7 \times 0{,}1 = 0{,}07$, $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}7 \times 0{,}9 = 0{,}63$.

2.2 Formule des probabilités totales

Si A et $\overline{A}$ forment une **partition** de l'univers :

$$\boxed{P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) = P(A) \times P_A(B) + P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(B)}$$

Généralisation. Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ forment une partition de l'univers :

$$P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) \times P_{A_k}(B)$$

Exemple. Un test médical : $P(M) = 0{,}02$, $P_M(T) = 0{,}85$, $P_{\overline{M}}(T) = 0{,}05$.
$P(T) = P(M) \times P_M(T) + P(\overline{M}) \times P_{\overline{M}}(T) = 0{,}02 \times 0{,}85 + 0{,}98 \times 0{,}05 = 0{,}017 + 0{,}049 = 0{,}066$.

$$P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{0{,}017}{0{,}066} \approx 0{,}258.$$

Même si le test est positif, il n'y a qu'environ 26 % de chance d'être malade.

Exercice. 5 % des pièces sont défectueuses. La machine A produit 60 % des pièces avec 3 % de défauts. La machine B produit le reste avec 8 % de défauts. Un produit défectueux vient-il plutôt de A ou de B ?

Correction. $P(D) = 0{,}6 \times 0{,}03 + 0{,}4 \times 0{,}08 = 0{,}018 + 0{,}032 = 0{,}05$.
$P_D(A) = \frac{0{,}018}{0{,}05} = 0{,}36$ et $P_D(B) = \frac{0{,}032}{0{,}05} = 0{,}64$.
Un produit défectueux vient plus probablement de la machine B.

ibrahim-rudasingwa

3 Indépendance de deux événements

Deux événements A et B sont **indépendants** si et seulement si :

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \times P(B)}$$

Cela équivaut à : $P_A(B) = P(B)$ (quand $P(A) \neq 0$).

L'indépendance est **symétrique** : A indépendant de B si et seulement si B indépendant de A.

Attention : indépendance $\neq$ incompatibilité. Deux événements incompatibles ($A \cap B = \emptyset$) ne sont généralement **pas** indépendants.

Exemple. $P(A) = 0{,}37$, $P(B) = 0{,}62$, $P(A \cap B) = 0{,}23$.
$P(A) \times P(B) = 0{,}37 \times 0{,}62 = 0{,}2294 \neq 0{,}23 = P(A \cap B)$.
Les événements A et B ne sont **pas** indépendants.

Exercice. $P(A) = 0{,}5$, $P(B) = 0{,}4$, $P(A \cap B) = 0{,}2$. A et B sont-ils indépendants ?

Correction. $P(A) \times P(B) = 0{,}5 \times 0{,}4 = 0{,}2 = P(A \cap B)$. Oui, A et B sont indépendants.

Exercice de synthèse

Dans une ville, 30 % des habitants prennent les transports en commun (TC). Parmi ceux qui prennent les TC, 80 % arrivent à l'heure (H). Parmi ceux qui ne les prennent pas, 60 % arrivent à l'heure.

1. Construire l'arbre pondéré complet.
2. Calculer $P(TC \cap H)$, $P(\overline{TC} \cap H)$ et $P(H)$.
3. Sachant qu'un habitant est à l'heure, calculer $P_H(TC)$.
4. Les événements TC et H sont-ils indépendants ? Justifier.

Correction. 1. $P(TC) = 0{,}3$, $P_{TC}(H) = 0{,}8$, $P_{\overline{TC}}(H) = 0{,}6$.
2. $P(TC \cap H) = 0{,}3 \times 0{,}8 = 0{,}24$.
$P(\overline{TC} \cap H) = 0{,}7 \times 0{,}6 = 0{,}42$.
$P(H) = 0{,}24 + 0{,}42 = 0{,}66$.
3. $P_H(TC) = \frac{0{,}24}{0{,}66} = \frac{4}{11} \approx 0{,}364$.
4. $P(TC) \times P(H) = 0{,}3 \times 0{,}66 = 0{,}198 \neq 0{,}24 = P(TC \cap H)$.
Donc TC et H ne sont pas indépendants.

Bilan

Probabilité conditionnelle :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Propriétés :
$P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B)$
$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$

Probabilités totales :

$$P(B) = P(A) \times P_A(B) + P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(B)$$

Indépendance :

A et B indépendants $\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Arbre pondéré :
Branches : probabilités conditionnelles.
Feuilles : probabilités d'intersections.
Somme des feuilles = 1.
Somme sur un nœud = 1.