Planche d'exercices n°2

Fonction inverse

Terminale Techno — Chapitre 4

Exercice 1 — Dérivée 1 [Correction]

Calculer la dérivée de chaque fonction :

1. $f(x) = x^2 + \dfrac{3}{x}$
2. $g(x) = -2x + 5 + \dfrac{1}{x}$

Exercice 2 — Dérivée 2 [Correction]

Soit $f(x) = x^3 + \dfrac{2}{x} - 4x$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Évaluer $f'(1)$ et $f'(2)$.

Exercice 3 — Dérivée 3 [Correction]

Déterminer la dérivée de $h(x) = \dfrac{4}{x} + x^2 + 1$.

Exercice 4 — Dérivée 4 [Correction]

Soit $f(x) = 2x + \dfrac{5}{x} - 3$. Calculer $f'(x)$ et $f'(-1)$.

Exercice 5 — Variations 1 [Correction]

Soit $f(x) = x + \dfrac{4}{x}$ définie sur $]0;+\infty[$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f.

Exercice 6 — Variations 2 [Correction]

Soit $g(x) = -x + \dfrac{9}{x}$ sur $]0;+\infty[$.

1. Déterminer $g'(x)$.
2. Dresser le tableau de variations.

Exercice 7 — Variations 3 [Correction]

Étudier les variations de $f(x) = 2x + \dfrac{8}{x}$ sur $]0;+\infty[$.

Exercice 8 — Variations 4 [Correction]

Soit $h(x) = x^2 + \dfrac{1}{x}$ sur $]0;+\infty[$.

1. Calculer $h'(x)$.
2. Déterminer les intervalles de monotonie.

Exercice 9 — Extremum 1 [Correction]

Soit $f(x) = x + \dfrac{16}{x}$ sur $]0;+\infty[$.

1. Montrer que f admet un minimum.
2. Déterminer ce minimum et la valeur de x correspondante.

Exercice 10 — Extremum 2 [Correction]

Un fabricant doit produire des boîtes. Le coût unitaire moyen est $C(x) = x + \dfrac{100}{x}$ (en euros, x en unités).

1. Pour quel nombre d'unités le coût est-il minimal ?
2. Quel est ce coût minimal ?

Exercice 11 — Extremum 3 [Correction]

Soit $f(x) = 3x + \dfrac{12}{x}$ sur $]0;+\infty[$.

1. Trouver le point où f atteint son minimum.
2. Calculer la valeur de ce minimum.

Exercice 12 — Extremum 4 [Correction]

Une entreprise a un coût de production $C(x) = 2x + \dfrac{50}{x} + 10$ (en milliers d'euros). Déterminer le nombre d'unités x pour lequel le coût est minimal.

Exercice 13 — Asymptotes 1 [Correction]

Soit $f(x) = x + 2 + \dfrac{3}{x-1}$.

1. Identifier l'asymptote verticale.
2. Identifier l'asymptote oblique.

Exercice 14 — Asymptotes 2 [Correction]

Déterminer les asymptotes (verticales et obliques) de :

1. $f(x) = 2x - 1 + \dfrac{4}{x+2}$
2. $g(x) = -x + \dfrac{2}{x-3}$

Exercice 15 — Asymptotes 3 [Correction]

Soit $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$.

1. Écrire $f(x)$ sous la forme $ax + b + \dfrac{c}{x}$.
2. En déduire les asymptotes.

Exercice 16 — Asymptotes 4 [Correction]

Analyser les asymptotes de $h(x) = 2x + 3 + \dfrac{5}{x}$ pour $x \neq 0$.

Exercice 17 — Équation 1 [Correction]

Résoudre l'équation $\dfrac{1}{x} = 2$ puis $\dfrac{1}{x} = -3$.

Exercice 18 — Équation 2 [Correction]

Résoudre : $x + \dfrac{4}{x} = 5$ sur $]0;+\infty[$.

Exercice 19 — Inéquation 1 [Correction]

Résoudre l'inéquation $\dfrac{1}{x} > 2$ sur $]0;+\infty[$.

Exercice 20 — Optimisation 1 [Correction]

Une boîte rectangulaire sans couvercle doit avoir une base carrée de côté x et un volume de 32 m³. Le matériau coûte 10 € par m² de surface.

1. Exprimer la surface en fonction de x.
2. Exprimer le coût en fonction de x.
3. Déterminer les dimensions pour lesquelles le coût est minimal.

Exercice 21 — Optimisation 2 [Correction]

On dispose d'une corde de 20 m pour enclore un rectangle dont un côté est un mur. Les trois autres côtés doivent être fermés par la corde.

1. Exprimer l'aire en fonction de la largeur x.
2. Déterminer la largeur pour laquelle l'aire est maximale.

Exercice 22 — Optimisation 3 [Correction]

Le bénéfice d'une production est $B(x) = -2x + \dfrac{1000}{x} - 50$ (en euros). Déterminer le nombre d'unités pour lequel le bénéfice est maximal.

Exercice 23 — Lecture graphique 1 [Correction]

Le graphique montre une courbe avec asymptote verticale en $x = 2$ et asymptote horizontale en $y = 3$.

1. Quelle est l'équation approchée de la fonction ?
2. Sur quels intervalles la fonction est-elle croissante ?

Exercice 24 — Lecture graphique 2 [Correction]

À partir du graphique, identifier :

1. Les asymptotes.
2. Les extrema locaux.
3. Les intervalles de croissance.

Exercice 25 — Lecture graphique 3 [Correction]

Sur le graphique fourni, lire les asymptotes et la position du minimum pour $f(x) = x + \dfrac{k}{x}$.

Exercice 26 — Concret 1 [Correction]

La concentration d'un médicament dans le sang est $C(t) = \dfrac{100t}{t+1}$ (en mg/L) où t est le temps en heures.

1. Calculer $C'(t)$.
2. Déterminer à quel moment la concentration est maximale.

Exercice 27 — Concret 2 [Correction]

Le rendement énergétique d'une machine est $R(v) = \dfrac{100}{v} + v - 20$ où v est la vitesse.

1. Déterminer la vitesse pour laquelle le rendement est optimal.
2. Quel est ce rendement ?

Exercice 28 — Concret 3 [Correction]

Un réservoir se vide selon $V(t) = \dfrac{1000}{t+1}$ (en litres). Déterminer la dérivée et interpréter sa signification.

Exercice 29 — Type BAC 1 [Correction]

Soit $f(x) = x + 2 + \dfrac{4}{x}$ définie sur $]0;+\infty[$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Dresser le tableau de variations.
3. Déterminer l'équation de l'asymptote oblique.
4. Montrer que f admet un minimum et le calculer.

Exercice 30 — Type BAC 2 **[Correction]**

Soit $g(x) = 2x - 3 + \dfrac{8}{x+1}$ définie sur $]-1;+\infty[$.

1. Identifier l'asymptote verticale.
2. Calculer $g'(x)$.
3. Étudier les variations et les extrema.
4. Déterminer l'asymptote oblique.

PLANCHE D'EXERCICES N°2

Fonction inverse

Correction 1 — Dérivée 1 [Énoncé]

1. $f(x) = x^2 + \frac{3}{x} = x^2 + 3x^{-1}$
   $f'(x) = 2x - 3x^{-2} = 2x - \frac{3}{x^2}$
2. $g(x) = -2x + 5 + \frac{1}{x} = -2x + 5 + x^{-1}$
   $g'(x) = -2 - x^{-2} = -2 - \frac{1}{x^2}$

Correction 2 — Dérivée 2 [Énoncé]

1. $f(x) = x^3 + 2x^{-1} - 4x$
   $f'(x) = 3x^2 - 2x^{-2} - 4 = 3x^2 - \frac{2}{x^2} - 4$
2. $f'(1) = 3(1)^2 - \frac{2}{1^2} - 4 = 3 - 2 - 4 = -3$
   $f'(2) = 3(4) - \frac{2}{4} - 4 = 12 - 0,5 - 4 = 7,5$

Correction 3 — Dérivée 3 [Énoncé]

$h(x) = 4x^{-1} + x^2 + 1$

$h'(x) = -4x^{-2} + 2x = -\frac{4}{x^2} + 2x = \frac{2x^3 - 4}{x^2}$

Correction 4 — Dérivée 4 [Énoncé]

$f(x) = 2x + 5x^{-1} - 3$

$f'(x) = 2 - 5x^{-2} = 2 - \frac{5}{x^2}$

$f'(-1) = 2 - \frac{5}{(-1)^2} = 2 - 5 = -3$

Correction 5 — Variations 1 [Énoncé]

Soit $f(x) = x + \frac{4}{x}$ sur $]0; +\infty[$

1. $f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2} = \frac{x^2 - 4}{x^2}$
2. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2$ (car $x > 0$)
   $f'(x) < 0$ pour $0 < x < 2$ et $f'(x) > 0$ pour $x > 2$
   $f(2) = 2 + \frac{4}{2} = 4$
   Tableau : croissance sur $]0; 2[$, minimum en $x = 2$ avec $f(2) = 4$, croissance sur $]2; +\infty[$

Correction 6 — Variations 2 [Énoncé]

Soit $g(x) = -x + \frac{9}{x}$ sur $]0; +\infty[$

$g'(x) = -1 - \frac{9}{x^2} < 0$ pour tout $x > 0$

Donc g est décroissante sur tout $]0; +\infty[$

Correction 7 — Variations 3 [Énoncé]

$f(x) = 2x + \frac{8}{x}$ sur $]0; +\infty[$

$f'(x) = 2 - \frac{8}{x^2} = \frac{2x^2 - 8}{x^2}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2$

$f'(x) < 0$ sur $]0; 2[$ et $f'(x) > 0$ sur $]2; +\infty[$

f décroît sur $]0; 2]$ et croît sur $[2; +\infty[$ avec minimum $f(2) = 4 + 4 = 8$

Correction 8 — Variations 4 [Énoncé]

$h(x) = x^2 + x^{-1}$ sur $]0; +\infty[$

1. $h'(x) = 2x - \frac{1}{x^2} = \frac{2x^3 - 1}{x^2}$
2. $h'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^3 = 1 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \approx 0,79$
   h décroît sur $]0; \sqrt[3]{1/2}]$ et croît sur $[\sqrt[3]{1/2}; +\infty[$

Correction 9 — Extremum 1 [Énoncé]

Soit $f(x) = x + \frac{16}{x}$ sur $]0; +\infty[$

1. $f'(x) = 1 - \frac{16}{x^2} = \frac{x^2 - 16}{x^2}$
   $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 4$ (car $x > 0$)
   $f'(x) < 0$ sur $]0; 4[$ et $f'(x) > 0$ sur $]4; +\infty[$
   Donc f admet un minimum en $x = 4$.
2. Le minimum est $f(4) = 4 + \frac{16}{4} = 4 + 4 = 8$

Correction 10 — Extremum 2 [Énoncé]

$C(x) = x + \frac{100}{x}$

1. $C'(x) = 1 - \frac{100}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 100 \Leftrightarrow x = 10$
   Le coût est minimal pour 10 unités.
2. $C(10) = 10 + \frac{100}{10} = 10 + 10 = 20$ euros

Correction 11 — Extremum 3 [Énoncé]

$f(x) = 3x + \frac{12}{x}$ sur $]0; +\infty[$

$f'(x) = 3 - \frac{12}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2$

Minimum en $x = 2$: $f(2) = 3(2) + \frac{12}{2} = 6 + 6 = 12$

Correction 12 — Extremum 4 [Énoncé]

$C(x) = 2x + \frac{50}{x} + 10$

$C'(x) = 2 - \frac{50}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 25 \Leftrightarrow x = 5$

Le coût est minimal pour 5 unités.

Correction 13 — Asymptotes 1 [Énoncé]

$f(x) = x + 2 + \frac{3}{x-1}$

1. Asymptote verticale : $x = 1$ (annule le dénominateur)
2. Asymptote oblique : $y = x + 2$ (la partie polynomiale)

Correction 14 — Asymptotes 2 [Énoncé]

1. $f(x) = 2x - 1 + \frac{4}{x+2}$
   Asymptote verticale : $x = -2$
   Asymptote oblique : $y = 2x - 1$
2. $g(x) = -x + \frac{2}{x-3}$
   Asymptote verticale : $x = 3$
   Asymptote oblique : $y = -x$

Correction 15 — Asymptotes 3 [Énoncé]

$f(x) = \frac{x^2+1}{x} = x + \frac{1}{x}$

1. $f(x) = x + 0 + \frac{1}{x}$ (de la forme $ax + b + \frac{c}{x}$)
2. Asymptote verticale : $x = 0$
   Asymptote oblique : $y = x$

Correction 16 — Asymptotes 4 [Énoncé]

$h(x) = 2x + 3 + \frac{5}{x}$ pour $x \neq 0$

Asymptote verticale : $x = 0$ (l'axe Oy)

Asymptote oblique : $y = 2x + 3$

Correction 17 — Équation 1 [Énoncé]

$\frac{1}{x} = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{2} = 0,5$

$\frac{1}{x} = -3 \Rightarrow x = -\frac{1}{3} \approx -0,33$

Correction 18 — Équation 2 [Énoncé]

$x + \frac{4}{x} = 5$ sur $]0; +\infty[$

Multiplier par x : $x^2 + 4 = 5x$

$x^2 - 5x + 4 = 0$

$(x-1)(x-4) = 0 \Rightarrow x = 1$ ou $x = 4$

Les deux solutions sont dans $]0; +\infty[$: $S = \{1; 4\}$

Correction 19 — Inéquation 1 [Énoncé]

$\frac{1}{x} > 2$ sur $]0; +\infty[$

Soustraire 2 : $\frac{1}{x} - 2 > 0$

$\frac{1-2x}{x} > 0$

Numérateur : $1 - 2x > 0 \Rightarrow x < \frac{1}{2}$

Dénominateur : $x > 0$

Donc $0 < x < \frac{1}{2}$: $S =]0; \frac{1}{2}[$

Correction 20 — Optimisation 1 [Énoncé]

1. Volume : $V = x^2 \cdot h = 32 \Rightarrow h = \frac{32}{x^2}$
   Surface : $S(x) = x^2 + 4xh = x^2 + 4x \cdot \frac{32}{x^2} = x^2 + \frac{128}{x}$
2. Coût : $P(x) = 10(x^2 + \frac{128}{x}) = 10x^2 + \frac{1280}{x}$
3. $P'(x) = 20x - \frac{1280}{x^2} = 0 \Rightarrow 20x^3 = 1280 \Rightarrow x = 4$
   Dimensions : $x = 4$ m, $h = \frac{32}{16} = 2$ m

Correction 21 — Optimisation 2 [Énoncé]

1. Avec un côté contre le mur : $2x + y = 20 \Rightarrow y = 20 - 2x$
   Aire : $A(x) = xy = x(20 - 2x) = 20x - 2x^2$
2. $A'(x) = 20 - 4x = 0 \Rightarrow x = 5$ m
   Largeur optimale : 5 m

Correction 22 — Optimisation 3 [Énoncé]

$B(x) = -2x + \frac{1000}{x} - 50$

$B'(x) = -2 - \frac{1000}{x^2} < 0$ pour tout $x > 0$

Donc B est décroissante : il n'y a pas de maximum. Le bénéfice diminue avec la production.

Correction 23 — Lecture graphique 1 [Énoncé]

1. Asymptote verticale en $x = 2$ et horizontale en $y = 3$ suggère une fonction de la forme $f(x) = 3 + \frac{k}{x-2}$
2. La croissance dépend du signe de k : si $k > 0$, croissance sur $]2; +\infty[$; si $k < 0$, décroissance sur $]2; +\infty[$

Correction 24 — Lecture graphique 2 [Énoncé]

À partir du graphique :

1. Asymptotes : identifier celles verticales (où la courbe tend à $\pm\infty$) et obliques/horizontales (direction asymptotique)
2. Extrema : points où la dérivée s'annule (maxima/minima locaux)

3. Intervalles de croissance : où la courbe monte

(Les réponses précises dépendent du graphique fourni)

Correction 25 — Lecture graphique 3 [Énoncé]

Pour $f(x) = x + \frac{k}{x}$ (fonction croissante puis décroissante ou inversement) :
Asymptotes : $x = 0$ (verticale) et $y = x$ (oblique)
Minimum ou maximum au point où $f'(x) = 1 - \frac{k}{x^2} = 0$, c'est-à-dire $x = \sqrt{k}$ ou $x = -\sqrt{k}$

Correction 26 — Concret 1 [Énoncé]

$C(t) = \frac{100t}{t+1}$

1. $C'(t) = \frac{100(t+1) - 100t}{(t+1)^2} = \frac{100}{(t+1)^2} > 0$
   La concentration croît toujours.
2. Comme $C'(t) > 0$ pour tout $t \geq 0$, il n'y a pas de maximum : la concentration approche asymptotiquement 100 mg/L quand $t \to \infty$

Correction 27 — Concret 2 [Énoncé]

$R(v) = \frac{100}{v} + v - 20$

$R'(v) = -\frac{100}{v^2} + 1 = \frac{v^2 - 100}{v^2} = 0 \Rightarrow v = 10$

$R(10) = \frac{100}{10} + 10 - 20 = 10 + 10 - 20 = 0$

Le rendement optimal est 0 (ou on cherche le maximum : $R(10) = 10$ en unités appropriées)

Correction 28 — Concret 3 [Énoncé]

$V(t) = \frac{1000}{t+1}$

$V'(t) = -\frac{1000}{(t+1)^2} < 0$

La dérivée est négative : le réservoir se vide (le volume diminue) et la vitesse de vidage diminue avec le temps (la dérivée en valeur absolue diminue).

Correction 29 — Type BAC 1 [Énoncé]

$f(x) = x + 2 + \frac{4}{x}$ sur $]0; +\infty[$

1. $f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2} = \frac{x^2 - 4}{x^2}$
2. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$
   Tableau : f décroît sur $]0; 2]$, croît sur $[2; +\infty[$
   Minimum : $f(2) = 2 + 2 + 2 = 6$
3. Asymptote oblique : $y = x + 2$
4. Minimum en $(2; 6)$ avec valeur minimale 6

Correction 30 — Type BAC 2 [Énoncé]

$g(x) = 2x - 3 + \frac{8}{x+1}$ sur $] - 1; +\infty[$

1. Asymptote verticale : $x = -1$
2. $g'(x) = 2 - \frac{8}{(x+1)^2} = \frac{2(x+1)^2 - 8}{(x+1)^2} = \frac{2(x^2 + 2x + 1) - 8}{(x+1)^2} = \frac{2x^2 + 4x - 6}{(x+1)^2} = \frac{2(x^2 + 2x - 3)}{(x+1)^2} = \frac{2(x+3)(x-1)}{(x+1)^2}$
3. Sur $] - 1; +\infty[$: $g'(x) = 0$ en $x = 1$
   $g'(x) < 0$ sur $] - 1; 1]$, $g'(x) > 0$ sur $[1; +\infty[$
   Minimum : $g(1) = 2(1) - 3 + \frac{8}{2} = 2 - 3 + 4 = 3$
4. Asymptote oblique : $y = 2x - 3$