Planche d'exercices n°1

Fonction inverse

Terminale Techno — Chapitre 4

Exercice 1 — Définition [Correction]

Soit $f(x) = \frac{1}{x}$. Déterminer l'ensemble de définition de f.

Exercice 2 — Calcul d'images [Correction]

Calculer $f(2)$, $f(-3)$, $f(0{,}5)$ et $f(-\frac{1}{2})$ pour $f(x) = \frac{1}{x}$.

Exercice 3 — Antécédents [Correction]

Trouver les antécédents de 2, de -1 et de $\frac{1}{4}$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.

Exercice 4 — Domaine et valeurs [Correction]

Donner le domaine de $g(x) = \frac{3}{x}$. Calculer $g(1)$, $g(3)$ et $g(-2)$.

Exercice 5 — Images et antécédents [Correction]

Pour $h(x) = \frac{2}{x}$, trouver x tel que $h(x) = 4$ et $h(x) = -2$.

Exercice 6 — Dérivée (1) [Correction]

Calculer la dérivée de $f(x) = \frac{1}{x}$.

Exercice 7 — Dérivée (2) [Correction]

Déterminer la dérivée de $g(x) = \frac{5}{x}$ et $h(x) = \frac{-3}{x}$.

Exercice 8 — Signe dérivée [Correction]

Étudier le signe de $f'(x)$ pour $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$.

Exercice 9 — Dérivée composée [Correction]

Calculer la dérivée de $f(x) = \frac{2}{x}$ et déterminer où elle est positive.

Exercice 10 — Application dérivée [Correction]

Pour $f(x) = \frac{4}{x}$, calculer $f'(x)$ puis évaluer $f'(2)$ et $f'(-1)$.

Exercice 11 — Variations [Correction]

Dresser le tableau de variations de $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$.

Exercice 12 — Tableau variations [Correction]

Donner le tableau de variations complet de $g(x) = \frac{-2}{x}$.

Exercice 13 — Monotonie [Correction]

La fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ est-elle monotone sur $\mathbb{R}^*$? Sur $\mathbb{R}^+$? Sur $\mathbb{R}^-$?

Exercice 14 — Comparaisons [Correction]

Comparer $f(2)$ et $f(3)$ pour $f(x) = \frac{1}{x}$.

Exercice 15 — Inégalités [Correction]

Si $0 < a < b$, comparer $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$.

Exercice 16 — Limites [Correction]

Calculer $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}$, $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x}$ et $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x}$.

Exercice 17 — Limites (2) [Correction]

Déterminer $\lim_{x\to -\infty} \frac{3}{x}$ et $\lim_{x\to 0} \frac{-1}{x}$.

Exercice 18 — Comportement asymptotique [Correction]

Décrire le comportement de $f(x) = \frac{2}{x}$ aux bornes de son domaine.

Exercice 19 — Asymptotes verticales [Correction]

Identifier l'asymptote verticale de $f(x) = \frac{1}{x}$ et de $g(x) = \frac{3}{x-1}$.

Exercice 20 — Asymptotes horizontales [Correction]

Quelle est l'asymptote horizontale de $f(x) = \frac{5}{x}$? Justifier.

Exercice 21 — Asymptotes (synthèse) [Correction]

Déterminer toutes les asymptotes de $h(x) = \frac{-2}{x}$.

Exercice 22 — Lecture graphique [Correction]

Sur un graphique montrant $f(x) = \frac{1}{x}$, identifier les asymptotes et les axes de symétrie.

Exercice 23 — Symétrie [Correction]

Montrer que $f(x) = \frac{1}{x}$ est une fonction impaire.

Exercice 24 — Fonction impaire [Correction]

Vérifier que $g(x) = \frac{3}{x}$ est impaire et interpréter graphiquement.

Exercice 25 — Propriétés graphiques [Correction]

La courbe de $f(x) = \frac{1}{x}$ admet-elle un centre de symétrie ? Lequel ?

Exercice 26 — Combinaisons (1) [Correction]

Calculer la dérivée de $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

Exercice 27 — Combinaisons (2) [Correction]

Étudier les variations de $g(x) = 2x + \frac{3}{x}$ sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 28 — Polynôme + inverse [Correction]

Déterminer la dérivée de $h(x) = -x^2 + \frac{2}{x}$ et son signe sur $\mathbb{R}^*$.

Exercice 29 — Synthèse (1) [Correction]

Étudier la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$: domaine, dérivée, variations, limites et asymptotes.

Exercice 30 — Synthèse (2) [Correction]

Tracer la courbe de $f(x) = \frac{-1}{x}$ après avoir étudié son domaine, dérivée et limites.

Planche d'exercices n°1

Fonction inverse

Correction 1 — Définition [Énoncé]

L'ensemble de définition de $f(x) = \frac{1}{x}$ est $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, car on ne peut pas diviser par zéro.

Correction 2 — Calcul d'images [Énoncé]

1. $f(2) = \frac{1}{2} = 0{,}5$
2. $f(-3) = -\frac{1}{3} \approx -0{,}333$
3. $f(0{,}5) = \frac{1}{0{,}5} = 2$
4. $f(-\frac{1}{2}) = -2$

Correction 3 — Antécédents [Énoncé]

1. $\frac{1}{x} = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$
2. $\frac{1}{x} = -1 \Rightarrow x = -1$
3. $\frac{1}{x} = \frac{1}{4} \Rightarrow x = 4$

Correction 4 — Domaine et valeurs [Énoncé]

Domaine de g : $\mathbb{R}^*$.
Puis $g(1) = 3$, $g(3) = 1$, $g(-2) = -\frac{3}{2}$.

Correction 5 — Images et antécédents [Énoncé]

1. $\frac{2}{x} = 4 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$
2. $\frac{2}{x} = -2 \Rightarrow x = -1$

Correction 6 — Dérivée (1) [Énoncé]

$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$ donc $f'(x) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$.

Correction 7 — Dérivée (2) [Énoncé]

Pour $g(x) = \frac{5}{x}$: $g'(x) = -\frac{5}{x^2}$.
Pour $h(x) = \frac{-3}{x}$: $h'(x) = \frac{3}{x^2}$.

Correction 8 — Signe dérivée [Énoncé]

$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$. Puisque $x^2 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a $f'(x) < 0$ sur tout le domaine.

Correction 9 — Dérivée composée [Énoncé]

$f'(x) = -\frac{2}{x^2}$. Puisque $x^2 > 0$, la dérivée est toujours négative.

Correction 10 — Application dérivée [Énoncé]

$f'(x) = -\frac{4}{x^2}$, donc $f'(2) = -\frac{4}{4} = -1$ et $f'(-1) = -\frac{4}{1} = -4$.

Correction 11 — Variations [Énoncé]

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$\|$	$-$
f	↘		↘

f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et sur $\mathbb{R}^+$.

Correction 12 — Tableau variations [Énoncé]

Pour $g(x) = \frac{-2}{x}$: $g'(x) = \frac{2}{x^2} > 0$ sur $\mathbb{R}^*$, donc g est strictement croissante sur $\mathbb{R}^-$ et sur $\mathbb{R}^+$.

Correction 13 — Monotonie [Énoncé]

Non, f n'est pas monotone sur $\mathbb{R}^*$ (elle change de monotonie à $x = 0$). Elle est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$ et sur $\mathbb{R}^-$.

Correction 14 — Comparaisons [Énoncé]

$f(2) = \frac{1}{2} = 0{,}5$ et $f(3) = \frac{1}{3} \approx 0{,}333$.
Donc $f(2) > f(3)$.

Correction 15 — Inégalités [Énoncé]

Si $0 < a < b$, alors $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ (la fonction inverse inverse les inégalités sur $\mathbb{R}^+$).

Correction 16 — Limites [Énoncé]

1. $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$
2. $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$
3. $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0^+$

Correction 17 — Limites (2) [Énoncé]

1. $\lim_{x\to -\infty} \frac{3}{x} = 0^-$
2. $\lim_{x\to 0^+} \frac{-1}{x} = -\infty$ et $\lim_{x\to 0^-} \frac{-1}{x} = +\infty$

Correction 18 — Comportement asymptotique [Énoncé]

En $x = 0$: asymptote verticale (limites infinies). En $\pm\infty$: asymptote horizontale $y = 0$ (limites vers 0).

Correction 19 — Asymptotes verticales [Énoncé]

Pour $f(x) = \frac{1}{x}$: asymptote verticale $x = 0$.
Pour $g(x) = \frac{3}{x-1}$: asymptote verticale $x = 1$.

Correction 20 — Asymptotes horizontales [Énoncé]

Pour $f(x) = \frac{5}{x}$: $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{5}{x} = 0$, donc asymptote horizontale $y = 0$.

Correction 21 — Asymptotes (synthèse) [Énoncé]

Pour $h(x) = \frac{-2}{x}$:

1. Asymptote verticale : $x = 0$
2. Asymptote horizontale : $y = 0$

Correction 22 — Lecture graphique [Énoncé]

La courbe de $f(x) = \frac{1}{x}$ admet :

1. Asymptote verticale $x = 0$
2. Asymptote horizontale $y = 0$
3. Centre de symétrie : $O(0, 0)$ (fonction impaire)

Correction 23 — Symétrie [Énoncé]

$f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -f(x)$, donc f est impaire (symétrique par rapport à l'origine).

Correction 24 — Fonction impaire [Énoncé]

$g(-x) = \frac{3}{-x} = -\frac{3}{x} = -g(x)$, donc g est impaire. Graphiquement : la courbe admet l'origine comme centre de symétrie.

Correction 25 — Propriétés graphiques [Énoncé]

Oui, le centre de symétrie est l'origine $O(0, 0)$, car la fonction est impaire.

Correction 26 — Combinaisons (1) [Énoncé]

$f(x) = x + \frac{1}{x}$ donc $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$.

Correction 27 — Combinaisons (2) [Énoncé]

$g(x) = 2x + \frac{3}{x}$ donc $g'(x) = 2 - \frac{3}{x^2}$.

Sur $\mathbb{R}^+$: $g'(x) = 0 \Rightarrow 2 = \frac{3}{x^2} \Rightarrow x^2 = \frac{3}{2} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

g décroît sur $\left(0, \sqrt{\frac{3}{2}}\right]$ puis croît sur $\left[\sqrt{\frac{3}{2}}, +\infty\right)$.

Correction 28 — Polynôme + inverse [Énoncé]

$h(x) = -x^2 + \frac{2}{x}$ donc $h'(x) = -2x - \frac{2}{x^2}$.

Sur $\mathbb{R}^+$: $h'(x) = -2x - \frac{2}{x^2} < 0$ (somme de deux termes négatifs), donc h décroît.

Sur $\mathbb{R}^-$: $h'(x) = -2x - \frac{2}{x^2}$. Pour $x < 0$: $-2x > 0$ mais $-\frac{2}{x^2} < 0$. À étudier plus précisément selon les valeurs.

Correction 29 — Synthèse (1) [Énoncé]

Pour $f(x) = \frac{1}{x}$:

1. Domaine : $\mathbb{R}^*$
2. $f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ sur $\mathbb{R}^*$
3. f décroît sur $\mathbb{R}^-$ et $\mathbb{R}^+$
4. $\lim_{x\to 0^\pm} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$
5. Asymptotes : $x = 0$ (verticale) et $y = 0$ (horizontale)

Correction 30 — Synthèse (2) [Énoncé]

Pour $f(x) = \frac{-1}{x}$:

1. Domaine : $\mathbb{R}^*$
2. $f'(x) = \frac{1}{x^2} > 0$ sur $\mathbb{R}^*$ (décroissances inversées par le signe négatif)
3. f croît sur $\mathbb{R}^-$ et $\mathbb{R}^+$
4. $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$
5. $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$
6. Asymptotes : $x = 0$ et $y = 0$; centre symétrie en O