DS Blanc n°2

Fonction inverse

Terminale Techno — Chapitre 4

Exercice 1 — QCM (15 min — 4 pts) [Correction]

Pour chaque question, choisir la bonne réponse et justifier le choix.

1. Quel est le domaine de définition de $f(x) = \frac{4}{x-3}$?
   a) $\mathbb{R}$
   b) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
   c) $\mathbb{R} \setminus \{3\}$
   d) $]0; +\infty[$
2. Quelle est l'asymptote horizontale de $g(x) = 2 + \frac{1}{x}$?
   a) $y = 0$
   b) $y = 1$
   c) $y = 2$
   d) $x = 0$
3. Quelle est la dérivée de $h(x) = \frac{-2}{x}$?
   a) $h'(x) = -\frac{2}{x^2}$
   b) $h'(x) = \frac{2}{x^2}$
   c) $h'(x) = \frac{-2}{x^2}$
   d) $h'(x) = \frac{2}{x}$
4. Soit $f(x) = x + \frac{16}{x}$ sur $]0; +\infty[$. Pour quel x la dérivée s'annule-t-elle ?
   a) $x = 2$
   b) $x = 4$
   c) $x = 8$
   d) $x = 16$

Exercice 2 — Calculs (15 min — 3 pts) [Correction]

1. Déterminer la dérivée de $f(x) = 2x^2 - \frac{3}{x} + 1$.
2. Déterminer le signe de $g'(x) = \frac{9-x^2}{x^2}$ pour $x > 0$.
3. Pour $h(x) = \frac{5}{x}$, construire le tableau de signes de $h'(x)$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

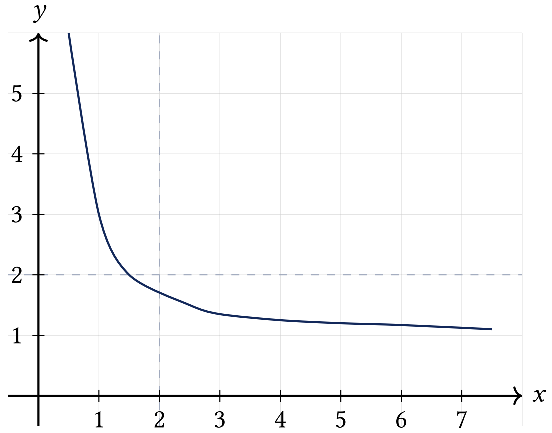
Exercice 3 — Étude complète (25 min — 5 pts) [Correction]

On considère la fonction $f(x) = x + \frac{4}{x}$ définie sur $]0; +\infty[$.

1. Déterminer $f'(x)$.
2. Résoudre l'équation $f'(x) = 0$.
3. Établir le tableau de variations de f sur $]0; +\infty[$.
4. Déterminer le minimum de f sur $]0; +\infty[$ et la valeur où il est atteint.
5. Donner une interprétation graphique (asymptotes, allure de la courbe).

Exercice 4 — Lecture graphique (15 min — 3 pts) [Correction]

On donne le graphe d'une fonction f. À partir du graphe, répondre aux questions suivantes :



1. Donner l'équation de l'asymptote verticale.
2. Donner l'équation de l'asymptote horizontale.
3. Déterminer les intervalles de monotonie (croissance/décroissance).
4. Déterminer l'extremum (minimum ou maximum) et donner ses coordonnées approximatives.

Exercice 5 — Problème (25 min — 5 pts) [Correction]

On souhaite fabriquer une boîte cylindrique sans couvercle. Le volume doit être de 1000 cm^3. On note r le rayon de la base (en cm) et h la hauteur (en cm). La surface latérale de la boîte est $S(r) = 2\pi rh + \pi r^2$ (surface latérale plus le fond).
Sachant que $V = \pi r^2 h = 1000$, on en déduit que $h = \frac{1000}{\pi r^2}$.

1. Exprimer $S(r)$ en fonction de r uniquement.
2. Déterminer $S'(r)$.
3. Déterminer le rayon r pour lequel la surface est minimale.
4. Calculer la hauteur correspondante.
5. Vérifier que le volume est bien de 1000 cm^3.

DS BLANC N°2

Fonction inverse

Correction 1 — QCM () [Énoncé]

1. **Réponse c).** Le domaine de définition de $f(x) = \frac{4}{x-3}$ est $\mathbb{R}\backslash\{3\}$, car la fonction n'est pas définie quand le dénominateur s'annule, c'est-à-dire quand $x = 3$.
2. **Réponse c).** L'asymptote horizontale de $g(x) = 2 + \frac{1}{x}$ est $y = 2$. Quand $x \to \pm\infty$, on a $\frac{1}{x} \to 0$, donc $g(x) \to 2$.
3. **Réponse b).** La dérivée de $h(x) = \frac{-2}{x} = -2x^{-1}$ est $h'(x) = -2 \cdot (-1)x^{-2} = \frac{2}{x^2}$.
4. **Réponse b).** $f(x) = x + \frac{16}{x}$, donc $f'(x) = 1 - \frac{16}{x^2}$. On résout $f'(x) = 0$:

$$1 - \frac{16}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = 4 \text{ (car } x > 0)$$

Correction 2 — Calculs () [Énoncé]

1. $f(x) = 2x^2 - \frac{3}{x} + 1 = 2x^2 - 3x^{-1} + 1$

$$f'(x) = 4x - 3 \cdot (-1)x^{-2} = 4x + \frac{3}{x^2}$$

2. Pour $x > 0$:

$$g'(x) = \frac{9 - x^2}{x^2}$$

Le numérateur $9 - x^2$ s'annule en $x = 3$. Pour $0 < x < 3$, on a $9 - x^2 > 0$ et $x^2 > 0$, donc $g'(x) > 0$. Pour $x > 3$, on a $9 - x^2 < 0$ et $x^2 > 0$, donc $g'(x) < 0$.
Tableau de signes :

x	0	3	$+\infty$
$g'(x)$		$+$	$-$

3. $h(x) = \frac{5}{x}$, donc $h'(x) = -\frac{5}{x^2}$.
Tableau de signes de $h'(x)$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$		$-$	$-$

(La dérivée est toujours négative, la fonction est décroissante sur chacun des deux intervalles $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$.)

Correction 3 — Étude complète () [Énoncé]

1. Détermination de $f'(x)$:

$$f(x) = x + 4x^{-1}$$
$$f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2}$$

2. Résolution de $f'(x) = 0$:

$$1 - \frac{4}{x^2} = 0$$
$$1 = \frac{4}{x^2}$$
$$x^2 = 4$$
$$x = 2 \text{ (car } x > 0)$$

3. Tableau de variations. Étudions le signe de $f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2}$:
   — Pour $0 < x < 2$: $x^2 < 4$, donc $\frac{4}{x^2} > 1$, donc $f'(x) < 0$ (décroissant).

— Pour $x > 2$: $x^2 > 4$, donc $\frac{4}{x^2} < 1$, donc $f'(x) > 0$ (croissant).

x	0	2	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$+$
f	$+\infty$	$\searrow$ $f(2)$	$\nearrow$ $+\infty$

4. Minimum de f :

$$f(2) = 2 + \frac{4}{2} = 2 + 2 = 4$$

Le minimum est $\boxed{4}$ et est atteint en $\boxed{x = 2}$.

5. Interprétation graphique :
   — La fonction n'a pas d'asymptote verticale (elle est définie sur $]0; +\infty[$).
   — Il n'y a pas d'asymptote horizontale (quand $x \to +\infty$, $f(x) \to +\infty$).
   — La courbe décroît de $+\infty$ jusqu'au point $(2, 4)$, puis elle croît vers $+\infty$.
   — La courbe est symétrique par rapport au point $(2, 4)$ en un certain sens (voir propriétés de la fonction hyperbole).

Correction 4 — Lecture graphique () [Énoncé]

1. L'asymptote verticale est la droite $\boxed{x = 2}$ (la courbe s'approche indéfiniment de cette droite quand $x \to 2^+$).
2. L'asymptote horizontale est la droite $\boxed{y = 1}$ (la courbe s'approche de cette droite quand $x \to +\infty$).
3. Intervalles de monotonie :
   — La fonction est décroissante sur $]2; +\infty[$.
   — Il n'y a pas d'intervalle où la fonction est croissante (le graphe montre une fonction décroissante, approchant asymptotiquement la droite $y = 1$).
4. Extremum : la courbe n'a ni minimum ni maximum sur l'intervalle considéré. La valeur minimale approchée est $y = 1$ (asymptotiquement), mais ce n'est pas un extremum au sens mathématique.

Correction 5 — Problème () [Énoncé]

1. Expression de $S(r)$ en fonction de r uniquement :

$$S(r) = 2\pi rh + \pi r^2$$

Avec $h = \frac{1000}{\pi r^2}$:

$$S(r) = 2\pi r \cdot \frac{1000}{\pi r^2} + \pi r^2 = \frac{2000}{r} + \pi r^2$$

2. Détermination de $S'(r)$:

$$S(r) = 2000r^{-1} + \pi r^2$$

$$S'(r) = 2000 \cdot (-1)r^{-2} + 2\pi r = -\frac{2000}{r^2} + 2\pi r$$

3. Rayon pour lequel la surface est minimale. Résolvons $S'(r) = 0$:

$$-\frac{2000}{r^2} + 2\pi r = 0$$

$$2\pi r = \frac{2000}{r^2}$$

$$2\pi r^3 = 2000$$

$$r^3 = \frac{1000}{\pi}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{1000}{\pi}} = \frac{10}{\sqrt[3]{\pi}} \approx \frac{10}{1{,}464} \approx 6{,}83 \text{ cm}$$

Vérification : $S'(r) = -\frac{2000}{r^2} + 2\pi r$. Pour $r = \sqrt[3]{\frac{1000}{\pi}}$, on a $r^3 = \frac{1000}{\pi}$, donc $2\pi r^3 = 2000$, donc $2\pi r = \frac{2000}{r^2}$, donc $S'(r) = 0$. OK

4. Hauteur correspondante :

$$\begin{aligned}
h = \frac{1000}{\pi r^2} &= \frac{1000}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{1000}{\pi}}\right)^2} = \frac{1000}{\pi} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1000}{\pi}\right)^{2/3}} \\
&= \frac{1000}{\pi} \cdot \frac{\pi^{2/3}}{1000^{2/3}} = \frac{1000 \cdot \pi^{2/3}}{\pi \cdot 1000^{2/3}} = \frac{1000^{1/3} \cdot \pi^{2/3}}{\pi} \\
&= \frac{\left(1000 \cdot \pi^2\right)^{1/3}}{\pi} = \frac{10\pi^{2/3}}{\pi} = 10\pi^{-1/3} = \frac{10}{\sqrt[3]{\pi}} \approx 6{,}83 \text{ cm}
\end{aligned}$$

   Remarque : on retrouve $h = r$.

5. Vérification du volume :

$$\begin{aligned}
V = \pi r^2 h &= \pi\left(\sqrt[3]{\frac{1000}{\pi}}\right)^2 \cdot \sqrt[3]{\frac{1000}{\pi}} \\
&= \pi \cdot \left(\frac{1000}{\pi}\right)^{2/3} \cdot \left(\frac{1000}{\pi}\right)^{1/3} \\
&= \pi \cdot \left(\frac{1000}{\pi}\right)^{2/3+1/3} = \pi \cdot \frac{1000}{\pi} = 1000 \text{ cm}^3
\end{aligned}$$

   OK