

DS Blanc n°1

Fonction inverse

Terminale Techno – Chapitre 4

Exercice 1 – Automatismes (15 min – 3 pts) [Correction]

Pour chacun des calculs suivants, donner le résultat sans calculatrice.

1. Calculer $f(2)$ et $f(-1)$ pour $f(x) = \frac{1}{x}$.
2. Calculer $g(4)$ pour $g(x) = \frac{3}{x}$.
3. Donner le domaine de définition de $h(x) = \frac{5}{x-2}$.
4. Déterminer l'image de -3 par $f(x) = \frac{1}{x}$.
5. Vrai ou Faux : la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ est définie en $x = 0$.

Exercice 2 – Dérivées (15 min – 3 pts) [Correction]

1. Déterminer la dérivée de $f(x) = \frac{2}{x}$.
2. Déterminer la dérivée de $g(x) = 3x - \frac{4}{x}$.
3. Déterminer la dérivée de $h(x) = x^2 + \frac{1}{x} - 5$.
4. Pour $f(x) = \frac{3}{x}$, calculer $f'(1)$.

Exercice 3 – Étude (25 min – 5 pts) [Correction]

On considère la fonction $f(x) = -x + 3 + \frac{2}{x}$ définie sur $]0; +\infty[$.

1. Déterminer $f'(x)$.
2. Déterminer le signe de $f'(x)$ sur $]0; +\infty[$ en résolvant $f'(x) = 0$.
3. Construire le tableau de variations de f sur $]0; +\infty[$.
4. Déterminer le minimum ou le maximum de f sur $]0; +\infty[$ (préciser la valeur et le point où il est atteint).

Exercice 4 – Asymptotes (15 min – 3 pts) [Correction]

Soit la fonction $g(x) = 1 - \frac{3}{x-2}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

1. Déterminer l'asymptote verticale de g .
2. Déterminer l'asymptote horizontale de g .
3. Justifier que la droite $x = 2$ est une asymptote verticale de la courbe de g .

Exercice 5 – Problème (25 min – 4 pts) [Correction]

Une entreprise fabrique des pièces. Le coût de production (en euros) en fonction du nombre de pièces x est donné par :

$$C(x) = 3x + \frac{50}{x}$$

où $x > 0$ est exprimé en centaines de pièces.

1. Calculer le coût total pour $x = 5$ (soit 500 pièces).
2. Déterminer $C'(x)$.

3. Déterminer le nombre de pièces pour lequel le coût de production est minimal.
4. Quel est ce coût minimal ?

Exercice 6 – Vrai/Faux (10 min – 2 pts) [Correction]

Pour chaque affirmation, indiquer si elle est vraie ou fausse. Justifier brièvement.

1. La fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ est strictement décroissante sur \mathbb{R} .
2. Pour $f(x) = \frac{k}{x}$ avec $k > 0$, la fonction est croissante sur $] -\infty; 0[$.
3. L'asymptote horizontale d'une fonction du type $f(x) = a + \frac{b}{x}$ est $y = a$.
4. La dérivée de $f(x) = \frac{1}{x}$ est $f'(x) = \frac{1}{x^2}$.

DS BLANC N°1

Fonction inverse

Correction 1 – Automatismes () [Énoncé]

- $f(2) = \frac{1}{2} = 0,5$ et $f(-1) = \frac{1}{-1} = -1$.
- $g(4) = \frac{3}{4} = 0,75$.
- Domaine de $h(x) = \frac{5}{x-2} : \mathbb{R} \setminus \{2\}$ (définie partout sauf où le dénominateur s'annule).
- Image de -3 : $f(-3) = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$.
- Faux. La fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ n'est pas définie en $x = 0$ car le dénominateur s'annule.

Correction 2 – Dérivées () [Énoncé]

- $f(x) = \frac{2}{x} = 2x^{-1}$, donc $f'(x) = 2 \cdot (-1)x^{-2} = -\frac{2}{x^2}$.
- $g(x) = 3x - \frac{4}{x}$, donc $g'(x) = 3 - (-\frac{4}{x^2}) = 3 + \frac{4}{x^2}$.
- $h(x) = x^2 + \frac{1}{x} - 5$, donc $h'(x) = 2x - \frac{1}{x^2}$.
- $f'(x) = -\frac{3}{x^2}$, donc $f'(1) = -\frac{3}{1^2} = -3$.

Correction 3 – Étude () [Énoncé]

- $f(x) = -x + 3 + \frac{2}{x} = -x + 3 + 2x^{-1}$
 $f'(x) = -1 + 0 - \frac{2}{x^2} = -1 - \frac{2}{x^2}$
- Réolvons $f'(x) = 0$:

$$-1 - \frac{2}{x^2} = 0$$

$$-\frac{2}{x^2} = 1$$

$$-2 = x^2$$

Cette équation n'a pas de solution réelle. Donc $f'(x) \neq 0$ pour tout $x > 0$.

- Puisque $f'(x) = -1 - \frac{2}{x^2}$, on a $f'(x) < 0$ pour tout $x > 0$ (car $-1 < 0$ et $-\frac{2}{x^2} < 0$).

Tableau de variations :

| | | |
|---------|-----------|-----------|
| x | 0 | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | | - |
| f | $+\infty$ | $-\infty$ |

- La fonction f est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$. Elle n'admet pas de minimum ou de maximum sur cet intervalle.

Correction 4 – Asymptotes () [Énoncé]

- Asymptote verticale : la fonction $g(x) = 1 - \frac{3}{x-2}$ n'est pas définie en $x = 2$. Quand $x \rightarrow 2$, le dénominateur tend vers 0, donc $g(x) \rightarrow \pm\infty$. L'asymptote verticale est $x = 2$.
- Asymptote horizontale : quand $x \rightarrow +\infty$ ou $x \rightarrow -\infty$, on a $\frac{3}{x-2} \rightarrow 0$, donc $g(x) \rightarrow 1$. L'asymptote horizontale est $y = 1$.
- La droite $x = 2$ est une asymptote verticale car :

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(1 - \frac{3}{x-2} \right) = 1 - \frac{3}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(1 - \frac{3}{x-2}\right) = 1 - \frac{3}{0^-} = +\infty$$

La courbe s'approche indéfiniment de la droite $x = 2$ sans jamais la toucher.

Correction 5 – Problème () [Énoncé]

1. Pour $x = 5$:

$$C(5) = 3 \cdot 5 + \frac{50}{5} = 15 + 10 = 25 \text{ euros}$$

2. Détermination de $C'(x)$:

$$C(x) = 3x + 50x^{-1}$$

$$C'(x) = 3 - \frac{50}{x^2}$$

3. Nombre de pièces pour le coût minimal. Résolvons $C'(x) = 0$:

$$3 - \frac{50}{x^2} = 0$$

$$3 = \frac{50}{x^2}$$

$$3x^2 = 50$$

$$x^2 = \frac{50}{3}$$

$$x = \sqrt{\frac{50}{3}} = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{6}}{3} \approx 4,08$$

Vérification du signe de $C'(x)$:

– Pour $0 < x < \sqrt{\frac{50}{3}}$: $x^2 < \frac{50}{3}$, donc $\frac{50}{x^2} > 3$, donc $C'(x) < 0$ (décroissant).

– Pour $x > \sqrt{\frac{50}{3}}$: $x^2 > \frac{50}{3}$, donc $\frac{50}{x^2} < 3$, donc $C'(x) > 0$ (croissant).

Donc C admet un minimum en $x = \frac{5\sqrt{6}}{3} \approx 4,08$ (centaines de pièces), soit environ 408 pièces.

4. Coût minimal :

$$C\left(\frac{5\sqrt{6}}{3}\right) = 3 \cdot \frac{5\sqrt{6}}{3} + \frac{50}{\frac{5\sqrt{6}}{3}}$$

$$= 5\sqrt{6} + \frac{50 \cdot 3}{5\sqrt{6}} = 5\sqrt{6} + \frac{30}{\sqrt{6}}$$

$$= 5\sqrt{6} + \frac{30\sqrt{6}}{6} = 5\sqrt{6} + 5\sqrt{6} = 10\sqrt{6} \approx \text{24,49 euros}$$

Correction 6 – Vrai/Faux () [Énoncé]

- Faux.** La fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $] -\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$ séparément, mais elle n'est pas décroissante sur \mathbb{R} car elle n'est pas définie en $x = 0$, et $f(-1) = -1 < 0,5 = f(1)$.
- Faux.** Pour $f(x) = \frac{k}{x}$ avec $k > 0$, la fonction est strictement décroissante sur $] -\infty; 0[$. (Quand x augmente de $-\infty$ vers 0^- , le dénominateur devient moins négatif en valeur absolue, donc le quotient devient plus négatif, donc f décroît.)
- Vrai.** Pour $f(x) = a + \frac{b}{x}$, quand $x \rightarrow \pm\infty$, on a $\frac{b}{x} \rightarrow 0$, donc $f(x) \rightarrow a$. L'asymptote horizontale est $y = a$.
- Faux.** La dérivée de $f(x) = \frac{1}{x}$ est $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, pas $+\frac{1}{x^2}$.