Chapitre 4 — Fonction inverse

Terminale Technologique • Tronc commun

Table des matières

PROGRAMME (BO — TERMINALE TECHNOLOGIQUE)

Contenus : Comportement aux bornes : limites en 0, $\pm\infty$. Asymptotes horizontale et verticale (approche intuitive). Dérivée : $(1/x)' = -1/x^2$. Sens de variation. Courbe représentative : hyperbole, symétrie par rapport à O. Combinaisons linéaires avec des fonctions polynomiales de degré ≤ 3.

Démonstrations : (1) Dérivée de $1/x$ par le taux de variation.

Capacités : Tracer la courbe de la fonction inverse. Calculer la dérivée de k/x et de combinaisons polynôme + inverse. Étudier les variations d'une fonction contenant $1/x$. Déterminer les asymptotes d'une fonction de type $P(x) + k/x$. Résoudre des problèmes d'optimisation avec la fonction inverse.

Tout le cours

Activités

Objectif : observer le comportement de $f(x) = \frac{1}{x}$.

1. Compléter le tableau de valeurs pour $x \in \{-4\,;\,-2\,;\,-1\,;\,-0{,}5\,;\,0{,}5\,;\,1\,;\,2\,;\,4\}$.
2. Peut-on calculer $f(0)$? Pourquoi ?
3. Placer les points dans un repère et tracer la courbe.
4. Que remarque-t-on sur la symétrie de la courbe ?
5. Que se passe-t-il quand x est très grand ? Quand x se rapproche de 0 ?

Correction. 1. $f(-4) = -0{,}25$, $f(-2) = -0{,}5$, $f(-1) = -1$, $f(-0{,}5) = -2$, $f(0{,}5) = 2$, $f(1) = 1$, $f(2) = 0{,}5$, $f(4) = 0{,}25$.
2. Non, $f(0) = 1/0$ n'existe pas. Division par zéro interdite.
3. La courbe est une hyperbole.
4. La courbe est symétrique par rapport à l'origine O : $f(-x) = -f(x)$ (fonction impaire).
5. Quand $x \to +\infty$, $f(x) \to 0$. Quand $x \to 0^+$, $f(x) \to +\infty$.

Objectif : calculer la dérivée de $f(x) = \frac{1}{x}$ par le taux de variation.

1. Calculer $f(a+h) - f(a) = \frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}$.
2. Simplifier $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.
3. En faisant tendre h vers 0, en déduire $f'(a)$.
4. Quel est le signe de $f'(a)$? Qu'en déduit-on pour les variations ?

Correction. 1. $\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a} = \frac{a-(a+h)}{a(a+h)} = \frac{-h}{a(a+h)}$.
2. $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{-h}{h \cdot a(a+h)} = \frac{-1}{a(a+h)}$.
3. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-1}{a(a+h)} = -\dfrac{1}{a^2}$. Donc $f'(a) = -\frac{1}{a^2}$.
4. $f'(a) = -\frac{1}{a^2} < 0$ pour tout $a \neq 0$. La fonction est décroissante sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$.

Objectif : comprendre la notion d'asymptote de façon intuitive.

On considère $f(x) = 1 + \frac{2}{x}$.

1. Calculer $f(10)$, $f(100)$, $f(1000)$. Vers quelle valeur tend $f(x)$ quand $x \to +\infty$?
2. Calculer $f(0{,}1)$, $f(0{,}01)$. Que se passe-t-il quand $x \to 0^+$?
3. La droite $y = 1$ est-elle une asymptote ? Justifier.
4. La droite $x = 0$ est-elle une asymptote ? Justifier.

Correction. 1. $f(10) = 1{,}2$, $f(100) = 1{,}02$, $f(1000) = 1{,}002$. $f(x) \to 1$ quand $x \to +\infty$.
2. $f(0{,}1) = 21$, $f(0{,}01) = 201$. $f(x) \to +\infty$ quand $x \to 0^+$.
3. Oui, $y = 1$ est asymptote horizontale car $f(x) \to 1$ quand $x \to \pm\infty$.
4. Oui, $x = 0$ est asymptote verticale car $f(x) \to \pm\infty$ quand $x \to 0$.

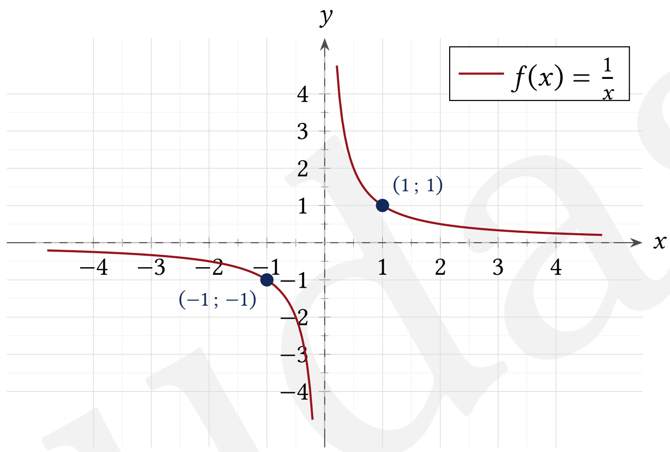
1 Définition et représentation graphique

Définition. La **fonction inverse** est la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Sa courbe représentative est une **hyperbole**.

- La courbe est **symétrique par rapport à l'origine** O : $f(-x) = -f(x)$ (fonction **impaire**).
- La courbe ne coupe **jamais** les axes de coordonnées.
- Points particuliers : $(1\,;\,1)$ et $(-1\,;\,-1)$.



2 Dérivée et sens de variation

Pour tout $x \neq 0$:

$$\boxed{f'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}}$$

Comme $x^2 > 0$, on a $f'(x) < 0$ sur tout le domaine de définition.

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}}{h} = \frac{\frac{a-(a+h)}{a(a+h)}}{h} = \frac{-h}{h \cdot a(a+h)} = \frac{-1}{a(a+h)}$$

Quand $h \to 0$: $\lim\limits_{h\to 0} \frac{-1}{a(a+h)} = -\frac{1}{a^2}$. Donc $f'(a) = -\frac{1}{a^2}$. **CQFD**

Conséquence. f est **strictement décroissante** sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0\,;+\infty[$.
Attention ! On ne peut **pas** dire que f est décroissante sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ car $f(-1) = -1 < 1 = f(1)$.

Généralisation. Pour $f(x) = \dfrac{k}{x}$ avec $k \neq 0$:

$$\boxed{f'(x) = -\frac{k}{x^2}}$$

— Si $k > 0$: $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ **décroissante**.
— Si $k < 0$: $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ **croissante**.

Exemples de dérivées.

Correction. $f(x) = \frac{7}{x}$: $f'(x) = -\frac{7}{x^2}$.
$g(x) = -\frac{3}{x}$: $g'(x) = \frac{3}{x^2}$.
$h(x) = \frac{4}{3x} = \frac{4/3}{x}$: $h'(x) = -\frac{4/3}{x^2} = -\frac{4}{3x^2}$.

3 Comportement aux bornes — Asymptotes

Limites en $\pm\infty$ (asymptote horizontale) :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0}$$

La droite $y = 0$ (axe des abscisses) est **asymptote horizontale**.

Limites en 0 (asymptote verticale) :

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x} = -\infty}$$

La droite $x = 0$ (axe des ordonnées) est **asymptote verticale**.

Asymptote horizontale : la courbe se rapproche indéfiniment d'une droite horizontale quand $x \to \pm\infty$.
Asymptote verticale : la courbe se rapproche indéfiniment d'une droite verticale, $f(x) \to \pm\infty$.

Exemple. Asymptotes de $g(x) = 1 + \frac{2}{x}$.

Correction. Quand $x \to \pm\infty$: $\frac{2}{x} \to 0$, donc $g(x) \to 1$. Asymptote horizontale : $y = 1$.
Quand $x \to 0^+$: $\frac{2}{x} \to +\infty$, donc $g(x) \to +\infty$. Quand $x \to 0^-$: $g(x) \to -\infty$. Asymptote verticale : $x = 0$.

4 Combinaisons polynôme + inverse

Règle de dérivation. Pour $h(x) = P(x) + \dfrac{k}{x}$ où P est un polynôme :

$$\boxed{h'(x) = P'(x) - \frac{k}{x^2}}$$

Exemple 1. $f(x) = 1 - 2x + \dfrac{2}{x}$ sur $]0\,;\,+\infty[$.

Correction. $f'(x) = -2 - \dfrac{2}{x^2}$. Comme $-\dfrac{2}{x^2} < 0$ et $-2 < 0$, on a $f'(x) < 0$ sur $]0\,;+\infty[$.
f est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$.

Exemple 2. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ sur $]0\,;\,+\infty[$.

Correction. $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$.
$f'(x) = 0 \iff x^2 = 1 \iff x = 1$ (car $x > 0$).
$f'(x) < 0$ si $0 < x < 1$ et $f'(x) > 0$ si $x > 1$.
f admet un minimum en $x = 1$: $f(1) = 2$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Exemple 3. $f(x) = x^2 - 3 + \dfrac{4}{x}$ sur $]0\,;\,+\infty[$.

Correction. $f'(x) = 2x - \dfrac{4}{x^2} = \dfrac{2x^3 - 4}{x^2}$.
$f'(x) = 0 \iff 2x^3 = 4 \iff x^3 = 2 \iff x = \sqrt[3]{2} \approx 1{,}26$.
f admet un minimum en $x = \sqrt[3]{2}$.

5 Bilan

Notion	Résultat
Définition	$f(x) = \dfrac{1}{x}$, définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
Dérivée	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$
Généralisation	$\left(\dfrac{k}{x}\right)' = -\dfrac{k}{x^2}$
Variations	Décroissante sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$
Asymptote horiz.	$y = 0$ (quand $x \to \pm\infty$)
Asymptote vert.	$x = 0$ (quand $x \to 0$)
Symétrie	Impaire : $f(-x) = -f(x)$
Combinaisons	$(P(x) + k/x)' = P'(x) - k/x^2$

6 Exercice de synthèse

1. Calculer les dérivées : $f(x) = \dfrac{7}{x}$ $\qquad g(x) = -\dfrac{1}{3x}$ $\qquad h(x) = 2x - \dfrac{5}{x}$
2. Étudier les variations de $f(x) = x + \dfrac{4}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$ et dresser le tableau de variations.
3. Déterminer les asymptotes de $g(x) = 2 + \dfrac{3}{x-1}$.
4. Un artisan produit x objets ($x > 0$). Le coût total est $C(x) = 2x + \dfrac{50}{x}$ euros.
   a) Calculer $C'(x)$. **b)** Déterminer le nombre d'objets minimisant le coût. **c)** Calculer ce coût minimal.
5. Soit $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$. Montrer que f admet un minimum et le calculer.

Correction. 1. $f'(x) = -\frac{7}{x^2}$. $g'(x) = \frac{1}{3x^2}$. $h'(x) = 2 + \frac{5}{x^2}$.

2. $f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2} = \frac{x^2-4}{x^2}$. $f'(x) = 0 \iff x = 2$. Min en $x = 2$: $f(2) = 4$.

3. $x \to \pm\infty$: $g(x) \to 2$, asymptote $y = 2$. $x \to 1$: $g(x) \to \pm\infty$, asymptote $x = 1$.

4. a) $C'(x) = 2 - \frac{50}{x^2}$. b) $C'(x) = 0 \iff x^2 = 25 \iff x = 5$. c) $C(5) = 10 + 10 = 20$ €.

5. $f'(x) = 2x - \frac{1}{x^2} = \frac{2x^3-1}{x^2}$. $f'(x) = 0 \iff x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \approx 0{,}794$. C'est un minimum car f' change de signe.
$f\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \sqrt[3]{2} = \frac{3}{\sqrt[3]{4}} \approx 1{,}89$.