Planche d'exercices n°2

Logarithme décimal

Terminale Techno — Chapitre 3

Exercice 1 — Simplifier [Correction]

Simplifiez les expressions suivantes :

1. $\log(2) + \log(50)$
2. $\log(75) - \log(3)$
3. $4\log(3) - \log(81)$

Exercice 2 — Réécrire [Correction]

Écrivez les expressions suivantes sous la forme d'un seul logarithme :

1. $2\log(3) + \log(5) - \log(45)$
2. $\log(8) - 3\log(2) + \log(4)$
3. $\frac{1}{2}\log(16) + \log(5)$

Exercice 3 — Sans calculatrice [Correction]

Sachant que $\log(2) = 0{,}301$ et $\log(3) = 0{,}477$, calculez :

1. $\log(6)$
2. $\log(12)$
3. $\log(15)$
4. $\log(0{,}2)$

Exercice 4 — Puissances [Correction]

Simplifiez les expressions suivantes :

1. $\dfrac{\log(8)}{\log(2)}$
2. $\dfrac{\log(27)}{\log(3)}$
3. $\dfrac{\log(625)}{\log(5)}$

Exercice 5 — Identités [Correction]

Prouvez que $\log(a) + \log(b) = \log(ab)$ en utilisant les valeurs spécifiques :

1. $a = 2, b = 5$
2. $a = 3, b = 4$

Exercice 6 — Résoudre (1) [Correction]

Résolvez les équations :

1. $\log(x) = 3$
2. $\log(x) = -2$
3. $\log(x) = 0{,}5$

Exercice 7 — Résoudre (2) [Correction]

Résolvez les équations :

1. $\log(2x + 1) = 1$
2. $\log(x^2) = 4$
3. $2\log(x) = \log(9)$

Exercice 8 — Type $a^x = b$ [Correction]

Résolvez les équations exponentielles :

1. $3^x = 10$
2. $7^x = 50$
3. $1{,}05^x = 3$

Exercice 9 — Type $x^a = b$ [Correction]

Résolvez les équations :

1. $x^3 = 50$
2. $x^7 = 1\,000$
3. $x^{1/2} = 5$

Exercice 10 — Mixtes [Correction]

Résolvez les équations :

1. $2^{x+1} = 3^x$
2. $5^x = 2^{3x-1}$

Exercice 11 — Inéquations (1) [Correction]

Résolvez les inéquations :

1. $\log(x) > 2$
2. $\log(x) < -1$
3. $\log(3x) \geq 1$

Exercice 12 — Inéquations (2) [Correction]

Résolvez les inéquations :

1. $2^n > 10^6$
2. $0{,}95^n < 0{,}5$
3. $1{,}1^n > 100$

Exercice 13 — Seuil (1) [**Correction**]

Trouvez le plus petit entier n tel que $1{,}03^n > 2$.

Exercice 14 — Seuil (2) [**Correction**]

Trouvez le plus petit entier n tel que $0{,}9^n < 0{,}01$.

Exercice 15 — Encadrement [**Correction**]

Trouvez deux entiers consécutifs entre lesquels se situe la solution de $3^x = 1\,000$.

Exercice 16 — Taux annuel [**Correction**]

Un placement augmente de 30 % globalement en 5 ans. Quel est le taux d'évolution annuel ?

Exercice 17 — Taux mensuel [**Correction**]

Un investissement a un taux annuel de 6 %. Quel est le taux mensuel équivalent ?

Exercice 18 — Doublement [**Correction**]

À un taux de 2,5 % par an, au bout de combien d'années une somme double-t-elle ?

Exercice 19 — Réduction [**Correction**]

Une valeur perd 15 % au total en 3 ans. Quel est le taux annuel de réduction ?

Exercice 20 — Comparaison [**Correction**]

Comparez deux placements : l'un à 4 %/an pendant 8 ans, l'autre à 6 %/an pendant 5 ans.

Exercice 21 — Décibels [**Correction**]

Le niveau sonore en décibels est $L = 10\log\left(\frac{I}{I_0}\right)$.

Calculez L pour :

1. $I = 10\,I_0$
2. $I = 10^6\,I_0$
3. $I = 10^{-10}\,I_0$

Exercice 22 — pH [**Correction**]

Le pH est défini par $\text{pH} = -\log([H^+])$.

1. Calculez le pH pour $[H^+] = 10^{-7}$ mol/L.
2. Trouvez $[H^+]$ si $\text{pH} = 3$.
3. Trouvez $[H^+]$ si $\text{pH} = 11$.

Exercice 23 — Richter [**Correction**]

Sur l'échelle de Richter, la magnitude d'un tremblement de terre est :

$$M = \log(A) - \log(A_0)$$

Comparez deux séismes avec $M_1 = 5$ et $M_2 = 7$.

Exercice 24 — Radioactivité [**Correction**]

Une substance radioactive a une demi-vie de 10 ans. Au bout de combien de temps reste-t-il 1 % de la masse initiale ?

Exercice 25 — Croissance [**Correction**]

Une population de bactéries double toutes les 20 minutes. Après combien de temps atteint-elle 10 000 fois sa taille initiale ?

Exercice 26 — Chiffres [**Correction**]

Combien de chiffres possèdent les nombres :

1. 3^{50}
2. 5^{200}
3. 7^{100}

Exercice 27 — Modélisation [**Correction**]

Un capital de 10 000 € est placé à 3,5 % par an. Au bout de combien d'années le capital atteindra-t-il 15 000 € ?

Exercice 28 — Démographie [**Correction**]

La population d'une ville croît de 2 % par an. Si elle était de 50 000 habitants en 2020, en quelle année dépassera-t-elle 70 000 habitants ?

Exercice 29 — Algorithme [**Correction**]

Écrivez une fonction Python `resoudre_expo(a, b)` qui résout l'équation $a^x = b$ en utilisant le logarithme décimal.

Exercice 30 — Synthèse [**Correction**]

Une entreprise achète une machine pour 50 000 €. La machine se déprécie de 8 % par an.

1. Écrivez la valeur $V(t)$ après t années.
2. Au bout de combien de temps la machine vaudra-t-elle 10 000 € ?
3. Vérifiez votre réponse.

PLANCHE D'EXERCICES N°2

Logarithme décimal

Correction 1 — Simplifier [Énoncé]

1. $\log(2) + \log(50) = \log(2 \times 50) = \log(100) = 2$
2. $\log(75) - \log(3) = \log\left(\frac{75}{3}\right) = \log(25) = 2\log(5) \approx 1{,}398$
3. $4\log(3) - \log(81) = \log(3^4) - \log(81) = \log(81) - \log(81) = 0$

Correction 2 — Réécrire [Énoncé]

1. $2\log(3) + \log(5) - \log(45) = \log(9) + \log(5) - \log(45) = \log\left(\frac{45}{45}\right) = \log(1) = 0$
2. $\log(8) - 3\log(2) + \log(4) = \log(8) - \log(8) + \log(4) = \log(4) = 2\log(2) \approx 0{,}602$
3. $\frac{1}{2}\log(16) + \log(5) = \log(16^{1/2}) + \log(5) = \log(4) + \log(5) = \log(20) \approx 1{,}301$

Correction 3 — Sans calculatrice [Énoncé]

1. $\log(6) = \log(2 \times 3) = \log(2) + \log(3) = 0{,}301 + 0{,}477 = 0{,}778$
2. $\log(12) = \log(4 \times 3) = 2\log(2) + \log(3) = 2(0{,}301) + 0{,}477 = 0{,}602 + 0{,}477 = 1{,}079$
3. $\log(15) = \log(3 \times 5) = \log(3) + \log(5) = 0{,}477 + (1 - \log(2)) = 0{,}477 + 0{,}699 = 1{,}176$
4. $\log(0{,}2) = \log\left(\frac{1}{5}\right) = -\log(5) = -(1 - \log(2)) = -0{,}699$

Correction 4 — Puissances [Énoncé]

1. $\frac{\log(8)}{\log(2)} = \frac{\log(2^3)}{\log(2)} = \frac{3\log(2)}{\log(2)} = 3$
2. $\frac{\log(27)}{\log(3)} = \frac{\log(3^3)}{\log(3)} = \frac{3\log(3)}{\log(3)} = 3$
3. $\frac{\log(625)}{\log(5)} = \frac{\log(5^4)}{\log(5)} = \frac{4\log(5)}{\log(5)} = 4$

Correction 5 — Identités [Énoncé]

1. $\log(2) + \log(5) = 0{,}301 + 0{,}699 = 1$ et $\log(10) = 1$ ☒
2. $\log(3) + \log(4) = 0{,}477 + 0{,}602 = 1{,}079$ et $\log(12) = 1{,}079$ ☒

Correction 6 — Résoudre (1) [Énoncé]

1. $\log(x) = 3 \Rightarrow x = 10^3 = 1\,000$
2. $\log(x) = -2 \Rightarrow x = 10^{-2} = 0{,}01$
3. $\log(x) = 0{,}5 \Rightarrow x = 10^{0{,}5} = \sqrt{10} \approx 3{,}162$

Correction 7 — Résoudre (2) [Énoncé]

1. $\log(2x + 1) = 1 \Rightarrow 2x + 1 = 10 \Rightarrow x = 4{,}5$
2. $\log(x^2) = 4 \Rightarrow x^2 = 10^4 = 10\,000 \Rightarrow x = 100$ ou $x = -100$
3. $2\log(x) = \log(9) \Rightarrow \log(x^2) = \log(9) \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = 3$ (car $x > 0$)

Correction 8 — Type $a^x = b$ [Énoncé]

1. $3^x = 10 \Rightarrow x\log(3) = \log(10) = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{\log(3)} = \frac{1}{0{,}477} \approx 2{,}096$
2. $7^x = 50 \Rightarrow x\log(7) = \log(50) \Rightarrow x = \frac{\log(50)}{\log(7)} \approx \frac{1{,}699}{0{,}845} \approx 2{,}011$
3. $1{,}05^x = 3 \Rightarrow x\log(1{,}05) = \log(3) \Rightarrow x = \frac{\log(3)}{\log(1{,}05)} \approx \frac{0{,}477}{0{,}0212} \approx 22{,}5$

Correction 9 — Type $x^a = b$ [Énoncé]

1. $x^3 = 50 \Rightarrow x = 50^{1/3} = 10^{\log(50)/3} \approx 3{,}684$
2. $x^7 = 1\,000 \Rightarrow x = 1\,000^{1/7} = 10^{3/7} \approx 3{,}593$
3. $x^{1/2} = 5 \Rightarrow x = 25$

Correction 10 — Mixtes [Énoncé]

1. $2^{x+1} = 3^x \Rightarrow (x + 1)\log(2) = x\log(3) \Rightarrow x\log(2) + \log(2) = x\log(3) \Rightarrow x(\log(3) - \log(2)) = \log(2) \Rightarrow x = \frac{\log(2)}{\log(3) - \log(2)} = \frac{0{,}301}{0{,}176} \approx 1{,}71$
2. $5^x = 2^{3x-1} \Rightarrow x\log(5) = (3x - 1)\log(2) \Rightarrow x\log(5) = 3x\log(2) - \log(2) \Rightarrow x(\log(5) - 3\log(2)) = -\log(2) \Rightarrow x = \frac{-\log(2)}{\log(5) - 3\log(2)} = \frac{-0{,}301}{0{,}699 - 0{,}903} \approx 1{,}43$

Correction 11 — Inéquations (1) [Énoncé]

1. $\log(x) > 2 \Rightarrow x > 10^2 = 100$
2. $\log(x) < -1 \Rightarrow x < 10^{-1} = 0{,}1$
3. $\log(3x) \geq 1 \Rightarrow 3x \geq 10 \Rightarrow x \geq \dfrac{10}{3} \approx 3{,}333$

Correction 12 — Inéquations (2) [Énoncé]

1. $2^n > 10^6 \Rightarrow n\log(2) > 6 \Rightarrow n > \dfrac{6}{0{,}301} \approx 19{,}93$. Donc $n \geq 20$.
2. $0{,}95^n < 0{,}5 \Rightarrow n\log(0{,}95) < \log(0{,}5) \Rightarrow n > \dfrac{\log(0{,}5)}{\log(0{,}95)} = \dfrac{-0{,}301}{-0{,}0223} \approx 13{,}5$. Donc $n \geq 14$.
3. $1{,}1^n > 100 \Rightarrow n\log(1{,}1) > 2 \Rightarrow n > \dfrac{2}{0{,}0414} \approx 48{,}3$. Donc $n \geq 49$.

Correction 13 — Seuil (1) [Énoncé]

$1{,}03^n > 2 \Rightarrow n\log(1{,}03) > \log(2) \Rightarrow n > \dfrac{\log(2)}{\log(1{,}03)} = \dfrac{0{,}301}{0{,}0128} \approx 23{,}5$

Le plus petit entier n est donc $\boxed{24}$.

Correction 14 — Seuil (2) [Énoncé]

$0{,}9^n < 0{,}01 \Rightarrow n\log(0{,}9) < \log(0{,}01) \Rightarrow n > \dfrac{\log(0{,}01)}{\log(0{,}9)} = \dfrac{-2}{-0{,}0458} \approx 43{,}7$

Le plus petit entier n est donc $\boxed{44}$.

Correction 15 — Encadrement [Énoncé]

$3^x = 1\,000 \Rightarrow x = \dfrac{\log(1\,000)}{\log(3)} = \dfrac{3}{0{,}477} \approx 6{,}29$

Donc $\boxed{6 < x < 7}$.

Vérification : $3^6 = 729 < 1\,000$ et $3^7 = 2\,187 > 1\,000$ ✓

Correction 16 — Taux annuel [Énoncé]

Soit t le taux annuel. Après 5 ans : $(1+t)^5 = 1{,}30 \Rightarrow 1+t = 1{,}30^{1/5} = 10^{\log(1{,}30)/5} \Rightarrow 1+t = 10^{0{,}1139/5} \approx 1{,}0539 \Rightarrow t \approx 5{,}39\,\%$

Correction 17 — Taux mensuel [Énoncé]

Soit t_m le taux mensuel. $(1+t_m)^{12} = 1{,}06 \Rightarrow 1+t_m = 1{,}06^{1/12} = 10^{\log(1{,}06)/12} \Rightarrow 1+t_m \approx 1{,}00487 \Rightarrow t_m \approx 0{,}487\,\%$

Correction 18 — Doublement [Énoncé]

$(1{,}025)^t = 2 \Rightarrow t = \dfrac{\log(2)}{\log(1{,}025)} = \dfrac{0{,}301}{0{,}01072} \approx 28{,}1$ années

Correction 19 — Réduction [Énoncé]

Soit r le taux annuel de réduction. $(1-r)^3 = 0{,}85 \Rightarrow 1-r = 0{,}85^{1/3} = 10^{\log(0{,}85)/3} \Rightarrow 1-r \approx 0{,}9495 \Rightarrow r \approx 5{,}05\,\%$

Correction 20 — Comparaison [Énoncé]

Placements 1 : $(1{,}04)^8 \approx 1{,}368$ soit $+36{,}8\,\%$ Placements 2 : $(1{,}06)^5 \approx 1{,}338$ soit $+33{,}8\,\%$

Le premier placement est plus avantageux.

Correction 21 — Décibels [Énoncé]

1. $L = 10\log(10) = 10 \times 1 = 10$ dB
2. $L = 10\log(10^6) = 10 \times 6 = 60$ dB
3. $L = 10\log(10^{-10}) = 10 \times (-10) = -100$ dB

Correction 22 — pH [Énoncé]

1. $\mathrm{pH} = -\log(10^{-7}) = -(-7) = 7$ (neutre)
2. $\mathrm{pH} = 3 \Rightarrow -\log([H^+]) = 3 \Rightarrow [H^+] = 10^{-3} = 0{,}001$ mol/L
3. $\mathrm{pH} = 11 \Rightarrow [H^+] = 10^{-11}$ mol/L

Correction 23 — Richter [Énoncé]

$M_1 = 5 \Rightarrow A_1 = 10^5 A_0$ $M_2 = 7 \Rightarrow A_2 = 10^7 A_0$

Rapport : $\dfrac{A_2}{A_1} = \dfrac{10^7}{10^5} = 10^2 = 100$

Le séisme de magnitude 7 est 100 fois plus intense que celui de magnitude 5.

Correction 24 — Radioactivité [Énoncé]

$M(t) = M_0\left(\dfrac{1}{2}\right)^{t/10} = 0{,}01M_0 \Rightarrow \left(\dfrac{1}{2}\right)^{t/10} = 0{,}01 \Rightarrow \dfrac{t}{10}\log(0{,}5) = \log(0{,}01) \Rightarrow t = \dfrac{10\log(0{,}01)}{\log(0{,}5)} = \dfrac{-20}{-0{,}301} \approx 66{,}4$ ans

Correction 25 — Croissance [Énoncé]

$P(t) = P_0 \cdot 2^{t/20} = 10\,000P_0 \Rightarrow 2^{t/20} = 10\,000 \Rightarrow \dfrac{t}{20}\log(2) = \log(10\,000) = 4 \Rightarrow t = \dfrac{4 \times 20}{0{,}301} \approx 266$ minutes $\approx 4{,}4$ heures

Correction 26 — Chiffres [Énoncé]

Le nombre de chiffres de n est $\lfloor \log(n) \rfloor + 1$.

1. $\log(3^{50}) = 50\log(3) = 50 \times 0{,}477 = 23{,}85$, donc 24 chiffres.
2. $\log(5^{200}) = 200\log(5) = 200 \times 0{,}699 = 139{,}8$, donc 140 chiffres.
3. $\log(7^{100}) = 100\log(7) \approx 100 \times 0{,}845 = 84{,}5$, donc 85 chiffres.

Correction 27 — Modélisation [Énoncé]

$C(t) = 10\,000 \times (1{,}035)^t = 15\,000 \Rightarrow (1{,}035)^t = 1{,}5$

$\Rightarrow t = \dfrac{\log(1{,}5)}{\log(1{,}035)} = \dfrac{0{,}176}{0{,}0149} \approx 11{,}8$ années

Après environ 12 années.

Correction 28 — Démographie [Énoncé]

$P(t) = 50\,000 \times (1{,}02)^t = 70\,000 \Rightarrow (1{,}02)^t = 1{,}4$

$\Rightarrow t = \dfrac{\log(1{,}4)}{\log(1{,}02)} = \dfrac{0{,}146}{0{,}00860} \approx 17$ années

Donc en 2020 + 17 = 2037.

Correction 29 — Algorithme [Énoncé]

```python
import math

def resoudre_expo(a, b):
    """
    Résout a^x = b
    Retourne x = log(b) / log(a)
    """
    if a <= 0 or a == 1 or b <= 0:
        return None
    x = math.log10(b) / math.log10(a)
    return x

# Exemples d'utilisation
print(resoudre_expo(3, 10))  # ~ 2.096
print(resoudre_expo(2, 8))   # = 3
```

Correction 30 — Synthèse [Énoncé]

1. Après t années : $V(t) = 50\,000 \times (1 - 0{,}08)^t = 50\,000 \times 0{,}92^t$
2. $50\,000 \times 0{,}92^t = 10\,000 \Rightarrow 0{,}92^t = 0{,}2 \Rightarrow t\log(0{,}92) = \log(0{,}2) \Rightarrow t = \dfrac{\log(0{,}2)}{\log(0{,}92)} = \dfrac{-0{,}699}{-0{,}0362} \approx 19{,}3$ années
   Après environ 19 ans et 4 mois.
3. Vérification : $V(19{,}3) = 50\,000 \times 0{,}92^{19{,}3} \approx 50\,000 \times 0{,}2 = 10\,000$