

Planche d'exercices n°1

Logarithme décimal

Terminale Techno – Chapitre 3

Exercice 1 – Définition [Correction]

Calculer sans calculatrice :

1. $\log(1000)$
2. $\log(0,01)$
3. $\log(1)$
4. $\log(10^5)$
5. $10^{\log(7)}$

Exercice 2 – Valeurs [Correction]

Résoudre :

1. $10^x = 100$
2. $10^x = 0,001$
3. $10^x = 10\,000$
4. $10^x = 1$

Exercice 3 – Encadrement [Correction]

Entre quels entiers consécutifs se situent :

1. $\log(50)$
2. $\log(500)$
3. $\log(3)$
4. $\log(0,5)$

Exercice 4 – Signe de log [Correction]

Déterminer le signe de :

1. $\log(0,3)$

2. $\log(5)$
3. $\log(1)$
4. $\log(100)$
5. $\log(0,01)$

Exercice 5 – Vrai/Faux [Correction]

1. $\log(a + b) = \log(a) + \log(b)$
2. $\log(a \times b) = \log(a) + \log(b)$
3. $\log(a^n) = n \log(a)$
4. $\log(10) = 1$
5. $\log(0,1) = -1$

Exercice 6 – Simplifier (1) [Correction]

Calculer :

1. $\log(4) + \log(25)$
2. $\log(50) + \log(20)$
3. $2 \log(5) + \log(4)$

Exercice 7 – Simplifier (2) [Correction]

Calculer :

1. $\log(8) - \log(2)$
2. $\log(1000) - \log(10)$
3. $3 \log(2) - \log(8)$

Exercice 8 – Simplifier (3) [Correction]

Sachant que $\log(a) = 2$, trouver :

1. $\log(a^3)$
2. $\log(10a)$
3. $\log\left(\frac{a}{100}\right)$
4. $\log(0,1 \times a)$

Exercice 9 – Factoriser [Correction]

Factoriser en utilisant les propriétés du logarithme :

1. $\log(x) + \log(y) - 2 \log(z)$
2. $3 \log(a) - 2 \log(b) + \log(c)$

Exercice 10 – Calcul mental [Correction]

Exprimer à l'aide de $\log(2) \approx 0,301$:

1. $\log(4)$
2. $\log(5)$
3. $\log(8)$
4. $\log(20)$
5. $\log(50)$

Exercice 11 – Équations (1) [Correction]

Résoudre en utilisant le logarithme :

1. $2^x = 8$
2. $3^x = 81$
3. $5^x = \frac{1}{25}$

Exercice 12 – Équations (2) [Correction]Résoudre (arrondir à 10^{-2}) :

- $6^x = 2$
- $5^x = 12$
- $7^x = 3$

Exercice 13 – Équations (3) [Correction]Résoudre pour $x > 0$:

- $x^3 = 7$
- $x^5 = 100$
- $x^4 = 0,5$

Exercice 14 – Équations (4) [Correction]

Résoudre :

- $3 \times 2^x = 48$
- $5^{2x-1} = 125$
- $4^x \times 2 = 32$

Exercice 15 – Équations (5) [Correction]

Résoudre :

- $2^x + 2^{x+1} = 24$
- $3^{x-1} + 3^x = 36$

Exercice 16 – Inéquations (1) [Correction]

Résoudre :

- $2^x > 64$
- $3^n < 1000$
- $5^x \geq 125$

Exercice 17 – Inéquations (2) [Correction]

Résoudre :

- $0,9^n < 0,5$
- $0,8^n \leq 0,1$
- $1,05^n > 2$

Exercice 18 – Inéquations (3) [Correction]

Résoudre :

- $1000 \times 0,95^x > 500$
- $50 \times 1,1^x \leq 100$

Exercice 19 – Seuil [Correction]Trouver le plus petit entier n tel que $1,02^n > 1,5$.**Exercice 20** – Doublement [Correction]

Un capital croît de 3 % par an. Au bout de combien d'années aura-t-il doublé ?

Exercice 21 – Taux moyen [Correction]

Un prix passe de 100 € à 160 € en 4 ans. Quel est le taux annuel moyen ?

Exercice 22 – Population [Correction]

Une ville croît de 25 % en 5 ans. Quel est le taux annuel moyen ?

Exercice 23 – Dépréciation [Correction]

Une voiture achetée 25 000 € se déprécie de 12 % par an. Après combien d'années vaut-elle moins de 15 000 € ?

Exercice 24 – Placement [Correction]

Un placement à intérêts composés (5 % par an) doit doubler. Combien de temps ?

Exercice 25 – Décibels [Correction]Le niveau sonore en décibels est $L = 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$ avec $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$.

- Calculer le niveau pour $I = 10^{-6} \text{ W/m}^2$
- Calculer le niveau pour $I = 1 \text{ W/m}^2$

Exercice 26 – Échelle log [Correction]

Placer sur une échelle logarithmique : 1, 10, 100, 1000, 10 000.

Exercice 27 – pH [Correction]Le pH se définit par $\text{pH} = -\log[\text{H}^+]$.

- Calculer le pH pour $[\text{H}^+] = 10^{-7}$
- Calculer le pH pour $[\text{H}^+] = 0,1$

Exercice 28 – Richter [Correction]L'énergie d'un séisme magnitude M : $\log(E) = 1,5M + 4,8$ (E en joules).

- Calculer E pour $M = 6$
- Quel est le rapport d'énergie entre $M = 7$ et $M = 5$?

Exercice 29 – Chiffres [Correction]Combien de chiffres a 2^{100} ?**Exercice 30** – Type BAC [Correction]

Une entreprise fabrique 100 000 articles en 2024. La production augmente de 2 % par an.

- Exprimer la production en année n
- Quelle année la production dépassera-t-elle 150 000 articles ?

PLANCHE D'EXERCICES N°1

Logarithme décimal

Correction 1 – Définition [Énoncé]

- $\log(1000) = \log(10^3) = 3$
- $\log(0,01) = \log(10^{-2}) = -2$
- $\log(1) = \log(10^0) = 0$
- $\log(10^5) = 5$
- $10^{\log(7)} = 7$ (propriété : $10^{\log(x)} = x$)

Correction 2 – Valeurs [Énoncé]

- $10^x = 100 = 10^2 \Rightarrow x = 2$
- $10^x = 0,001 = 10^{-3} \Rightarrow x = -3$
- $10^x = 10\,000 = 10^4 \Rightarrow x = 4$
- $10^x = 1 = 10^0 \Rightarrow x = 0$

Correction 3 – Encadrement [Énoncé]

- $\log(10) = 1 < \log(50) < \log(100) = 2$, donc $1 < \log(50) < 2$
- $\log(100) = 2 < \log(500) < \log(1000) = 3$, donc $2 < \log(500) < 3$
- $\log(1) = 0 < \log(3) < \log(10) = 1$, donc $0 < \log(3) < 1$
- $\log(0,1) = -1 < \log(0,5) < \log(1) = 0$, donc $-1 < \log(0,5) < 0$

Correction 4 – Signe de log [Énoncé]

- $\log(0,3) < 0$ (car $0,3 < 1$)

- $\log(5) > 0$ (car $5 > 1$)
- $\log(1) = 0$
- $\log(100) > 0$ (car $100 > 1$)
- $\log(0,01) < 0$ (car $0,01 < 1$)

Correction 5 – Vrai/Faux [Énoncé]

- Faux** : $\log(a+b) \neq \log(a) + \log(b)$ en général
- Vrai** : $\log(a \times b) = \log(a) + \log(b)$
- Vrai** : $\log(a^n) = n \log(a)$
- Vrai** : $\log(10) = 1$
- Vrai** : $\log(0,1) = \log(10^{-1}) = -1$

Correction 6 – Simplifier (1) [Énoncé]

- $\log(4) + \log(25) = \log(4 \times 25) = \log(100) = 2$
- $\log(50) + \log(20) = \log(50 \times 20) = \log(1000) = 3$
- $2 \log(5) + \log(4) = \log(5^2) + \log(4) = \log(25) + \log(4) = \log(100) = 2$

Correction 7 – Simplifier (2) [Énoncé]

- $\log(8) - \log(2) = \log\left(\frac{8}{2}\right) = \log(4) = \log(2^2) = 2 \log(2)$
- $\log(1000) - \log(10) = \log\left(\frac{1000}{10}\right) = \log(100) = 2$
- $3 \log(2) - \log(8) = \log(2^3) - \log(8) = \log(8) - \log(8) = 0$

Correction 8 – Simplifier (3) [Énoncé]

Sachant $\log(a) = 2$, on a $a = 10^2 = 100$.

- $\log(a^3) = 3 \log(a) = 3 \times 2 = 6$
- $\log(10a) = \log(10) + \log(a) = 1 + 2 = 3$
- $\log\left(\frac{a}{100}\right) = \log(a) - \log(100) = 2 - 2 = 0$
- $\log(0,1 \times a) = \log(0,1) + \log(a) = -1 + 2 = 1$

Correction 9 – Factoriser [Énoncé]

- $\log(x) + \log(y) - 2 \log(z) = \log(x) + \log(y) - \log(z^2) = \log\left(\frac{xy}{z^2}\right)$
- $3 \log(a) - 2 \log(b) + \log(c) = \log(a^3) - \log(b^2) + \log(c) = \log\left(\frac{a^3 c}{b^2}\right)$

Correction 10 – Calcul mental [Énoncé]

Avec $\log(2) \approx 0,301$:

- $\log(4) = \log(2^2) = 2 \log(2) \approx 0,602$
- $\log(5) = \log\left(\frac{10}{2}\right) = 1 - \log(2) \approx 0,699$
- $\log(8) = 3 \log(2) \approx 0,903$
- $\log(20) = \log(2 \times 10) = \log(2) + 1 \approx 1,301$
- $\log(50) = \log\left(\frac{100}{2}\right) = 2 - \log(2) \approx 1,699$

Correction 11 – Équations (1) [Énoncé]

- $2^x = 8 = 2^3 \Rightarrow x = 3$
- $3^x = 81 = 3^4 \Rightarrow x = 4$
- $5^x = \frac{1}{25} = 5^{-2} \Rightarrow x = -2$

Correction 12 – Équations (2) [Énoncé]

- $6^x = 2 \Rightarrow \log(6^x) = \log(2) \Rightarrow x \log(6) = \log(2) \Rightarrow x = \frac{\log(2)}{\log(6)} \approx 0,39$
- $5^x = 12 \Rightarrow x = \frac{\log(12)}{\log(5)} \approx 1,54$
- $7^x = 3 \Rightarrow x = \frac{\log(3)}{\log(7)} \approx 0,56$

Correction 13 – Équations (3) [Énoncé]

- $x^3 = 7 \Rightarrow x = 7^{1/3} = \sqrt[3]{7} \approx 1,91$
- $x^5 = 100 \Rightarrow x = 100^{1/5} = \sqrt[5]{100} \approx 2,51$
- $x^4 = 0,5 \Rightarrow x = 0,5^{1/4} = \sqrt[4]{0,5} \approx 0,84$

Correction 14 – Équations (4) [Énoncé]

- $3 \times 2^x = 48 \Rightarrow 2^x = 16 = 2^4 \Rightarrow x = 4$
- $5^{2x-1} = 125 = 5^3 \Rightarrow 2x - 1 = 3 \Rightarrow x = 2$
- $4^x \times 2 = 32 \Rightarrow 4^x = 16 = 4^2 \Rightarrow x = 2$

Correction 15 – Équations (5) [Énoncé]

- $2^x + 2^{x+1} = 24 \Rightarrow 2^x(1 + 2) = 24 \Rightarrow 3 \times 2^x = 24 \Rightarrow 2^x = 8 = 2^3 \Rightarrow x = 3$
- $3^{x-1} + 3^x = 36 \Rightarrow 3^x \left(\frac{1}{3} + 1\right) = 36 \Rightarrow \frac{4}{3} \times 3^x = 36 \Rightarrow 3^x = 27 = 3^3 \Rightarrow x = 3$

Correction 16 – Inéquations (1) [Énoncé]

- $2^x > 64 = 2^6 \Rightarrow x > 6$
- $3^n < 1000 \Rightarrow n \log(3) < \log(1000) \Rightarrow n < \frac{3}{\log(3)} \approx 6,29 \Rightarrow n \leq 6$
- $5^x \geq 125 = 5^3 \Rightarrow x \geq 3$

Correction 17 – Inéquations (2) [Énoncé]

- $0,9^n < 0,5 \Rightarrow n \log(0,9) < \log(0,5) \Rightarrow n > \frac{\log(0,5)}{\log(0,9)} \approx 6,58 \Rightarrow n \geq 7$
- $0,8^n \leq 0,1 \Rightarrow n > \frac{\log(0,1)}{\log(0,8)} \approx 10,32 \Rightarrow n \geq 11$
- $1,05^n > 2 \Rightarrow n > \frac{\log(2)}{\log(1,05)} \approx 14,21 \Rightarrow n \geq 15$

Correction 18 – Inéquations (3) [Énoncé]

- $1000 \times 0,95^x > 500 \Rightarrow 0,95^x > 0,5 \Rightarrow x < \frac{\log(0,5)}{\log(0,95)} \approx 13,51 \Rightarrow x \leq 13$
- $50 \times 1,1^x \leq 100 \Rightarrow 1,1^x \leq 2 \Rightarrow x \leq \frac{\log(2)}{\log(1,1)} \approx 7,27 \Rightarrow x \leq 7$

Correction 19 – Seuil [Énoncé]

- $$1,02^n > 1,5 \Rightarrow n \log(1,02) > \log(1,5)$$
- $$n > \frac{\log(1,5)}{\log(1,02)} \approx \frac{0,176}{0,0086} \approx 20,48$$
- Le plus petit entier est $n = 21$.

Correction 20 – Doublement [Énoncé]

- Un capital double : $C_0 \times 1,03^n = 2C_0$
- $$1,03^n = 2 \Rightarrow n = \frac{\log(2)}{\log(1,03)} \approx \frac{0,301}{0,0128} \approx 23,5 \text{ ans}$$
- Au bout d'environ 23 à 24 années.

Correction 21 – Taux moyen [Énoncé]

- Prix : $100 \times (1 + t)^4 = 160$
- $$(1 + t)^4 = 1,6 \Rightarrow 1 + t = 1,6^{1/4} = \sqrt[4]{1,6} \approx 1,1247$$
- $$t \approx 0,1247 = 12,47 \% \text{ par an}$$

Correction 22 – Population [Énoncé]

- Population : $P_0 \times (1 + t)^5 = 1,25P_0$
- $$(1 + t)^5 = 1,25 \Rightarrow 1 + t = 1,25^{1/5} \approx 1,0456$$
- $$t \approx 0,0456 = 4,56 \% \text{ par an}$$

Correction 23 – Dépréciation [Énoncé]

- Valeur : $25\,000 \times 0,88^n < 15\,000$
- $$0,88^n < 0,6 \Rightarrow n \log(0,88) < \log(0,6)$$
- $$n > \frac{\log(0,6)}{\log(0,88)} \approx \frac{-0,222}{-0,0555} \approx 4,0$$
- Après 4 ou 5 années, la voiture vaut moins de 15 000 €.

Correction 24 – Placement [Énoncé]

- Capital double : $C_0 \times 1,05^n = 2C_0$
- $$1,05^n = 2 \Rightarrow n = \frac{\log(2)}{\log(1,05)} \approx 14,2 \text{ ans}$$
- Environ 14 à 15 années.

Correction 25 – Décibels [Énoncé]

$$L = 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

- Pour $I = 10^{-6}$: $L = 10 \log\left(\frac{10^{-6}}{10^{-12}}\right) = 10 \log(10^6) = 10 \times 6 = 60 \text{ dB}$
- Pour $I = 1$: $L = 10 \log\left(\frac{1}{10^{-12}}\right) = 10 \log(10^{12}) = 10 \times 12 = 120 \text{ dB}$

Correction 26 – Échelle log [Énoncé]

Sur une échelle logarithmique, les points sont espacés selon $\log(x)$:

- $\log(1) = 0$
- $\log(10) = 1$
- $\log(100) = 2$
- $\log(1000) = 3$
- $\log(10\,000) = 4$

Ils sont équidistants sur l'échelle, espacés de 1 unité chacun.

Correction 27 – pH [Énoncé]

$$\text{pH} = -\log[\text{H}^+]$$

1. Pour $[H^+] = 10^{-7}$: $\text{pH} = -\log(10^{-7}) = -(-7) = 7$ (neutre)
2. Pour $[H^+] = 0,1 = 10^{-1}$: $\text{pH} = -\log(10^{-1}) = -(-1) = 1$ (acide)

Correction 28 – Richter [Énoncé]

$\log(E) = 1,5M + 4,8$, donc $E = 10^{1,5M+4,8}$ joules.

1. Pour $M = 6$: $E = 10^{1,5 \times 6 + 4,8} = 10^{9+4,8} = 10^{13,8} \approx 6,3 \times 10^{13}$ J

2. Rapport pour $M = 7$ et $M = 5$: $\frac{E_7}{E_5} = \frac{10^{1,5 \times 7 + 4,8}}{10^{1,5 \times 5 + 4,8}} = 10^{1,5(7-5)} = 10^3 = 1000$

Correction 29 – Chiffres [Énoncé]

Le nombre de chiffres de 2^{100} est $\lceil \log(2^{100}) \rceil + 1 = \lceil 100 \log(2) \rceil + 1$.

$$100 \log(2) \approx 100 \times 0,301 = 30,1$$

Nombre de chiffres : $\lceil 30,1 \rceil + 1 = 30 + 1 = 31$ chiffres.

Correction 30 – Type BAC [Énoncé]

Production initiale : $P_0 = 100\,000$, croissance de 2 % par an.

1. En année n (où $n = 0$ correspond à 2024) : $P(n) = 100\,000 \times 1,02^n$
2. Dépasser 150 000 : $100\,000 \times 1,02^n > 150\,000$
 $1,02^n > 1,5 \Rightarrow n > \frac{\log(1,5)}{\log(1,02)} \approx 20,48$
 Pour $n = 21$: année 2045. La production dépassera 150 000 articles en 2045.