DS Blanc n°2

Logarithme décimal

Terminale Techno — Chapitre 3

Exercice 1 — 20 min (Automatismes) [Correction]

5 pts

Répondre aux questions suivantes. Justifier brièvement chaque réponse.

No	Question	Réponse
1	Calculer $\log(1)$	
2	Résoudre $10^x = 0{,}1$	
3	Simplifier $\log(10^5)$	
4	Calculer $10^{3\log(2)}$	
5	Résoudre $\log(x) = 0{,}5$	
6	Simplifier $\log\left(\frac{a}{b}\right)$	
7	Vrai ou faux : $\log(a+b) = \log(a) + \log(b)$	
8	Calculer $\log(10^{-4})$	
9	Résoudre $3 \times 10^x = 300$	
10	Simplifier $10^{\log(x^2)}$ pour $x > 0$	

Exercice 2 — 35 min (Démographie) [Correction]

6 pts

La population d'une ville suit un modèle exponentiel. On observe :

— Année 2010 : $P_0 = 50\,000$ habitants

— Année 2020 : $P_{10} = 61\,000$ habitants

On modélise la population par $P(t) = P_0 \times a^t$ où t est le nombre d'années après 2010.

1. Calculer le coefficient multiplicateur annuel a (arrondir à 0,001). Détailler le calcul logarithmique.
2. Exprimer le taux de croissance annuel r en pourcentage.
3. Estimer la population en 2025. Arrondir à l'unité.
4. Projeter l'année où la population atteindra 80 000 habitants. Résoudre à l'aide des logarithmes.
5. Écrire un algorithme en Python qui calcule la population année par année jusqu'à ce qu'elle dépasse 100 000 habitants.

Exercice 3 — 25 min (Acoustique) [Correction]

5 pts

Dans un auditorium, on mesure les niveaux sonores de plusieurs sources à l'aide de la formule :

$$L = 10\log\left(\frac{I}{I_0}\right) \quad \text{où} \quad I_0 = 10^{-12}\ \text{W/m}^2$$

1. L'orateur parle avec une intensité $I_1 = 2{,}5 \times 10^{-5}$ W/m². Calculer son niveau sonore L_1 (arrondir à 0,1 dB).
2. Le système de climatisation produit un bruit de $L_2 = 50$ dB. Calculer l'intensité I_2 (notation scientifique).
3. Comparer les deux intensités : l'orateur est-il plus loud que la climatisation ? Par quel facteur ?
4. Si on ajoute une troisième source avec $L_3 = 55$ dB, calculer l'intensité combinée théorique (en supposant l'additivité énergétique) et le niveau sonore résultant.

Exercice 4 — 20 min **(Synthèse)** [Correction]

4 pts

1. Simplifier l'expression : $\log(a^2b) - \log\left(\frac{b^2}{a}\right) + \log(10)$
2. Résoudre l'équation : $\log(x-3) + \log(x+2) = 1$
3. Résoudre l'inéquation : $2\log(x) \leq \log(16)$ pour $x > 0$

DS Blanc n°2

Logarithme décimal

Correction 1 — (Automatismes) [Énoncé]

corrtext

1. $\log(1) = 0$ (car $10^0 = 1$)
2. $10^x = 0{,}1 = 10^{-1} \Rightarrow x = -1$
3. $\log(10^5) = 5$
4. $10^{3\log(2)} = 10^{\log(2^3)} = 2^3 = 8$
5. $\log(x) = 0{,}5 \Rightarrow x = 10^{0{,}5} = \sqrt{10} \approx 3{,}162$
6. $\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$
7. Faux : la propriété correcte est $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$, pas pour une somme
8. $\log(10^{-4}) = -4$
9. $3 \times 10^x = 300 \Rightarrow 10^x = 100 \Rightarrow x = 2$
10. $10^{\log(x^2)} = x^2$ pour $x > 0$

Correction 2 — (Démographie) [Énoncé]

corrtext

1. Calcul du coefficient : $P(10) = P_0 \times a^{10}$

$$61\,000 = 50\,000 \times a^{10} \Rightarrow a^{10} = 1{,}22$$

$$10\log(a) = \log(1{,}22) \Rightarrow \log(a) = \frac{\log(1{,}22)}{10} \approx \frac{0{,}0864}{10} \approx 0{,}00864$$

$$a = 10^{0{,}00864} \approx 1{,}020$$

2. Taux : $r = a - 1 \approx 0{,}020 = 2{,}0\%$ par an
3. Population en 2025 (t = 15) : $P(15) = 50\,000 \times 1{,}020^{15} \approx 50\,000 \times 1{,}3459 \approx 67\,295$ habitants
4. Année où $P(t) = 80\,000$:

$$80\,000 = 50\,000 \times 1{,}020^t \Rightarrow 1{,}6 = 1{,}020^t$$

$$\log(1{,}6) = t\log(1{,}020) \Rightarrow t = \frac{\log(1{,}6)}{\log(1{,}020)} \approx \frac{0{,}2041}{0{,}00864} \approx 23{,}6 \text{ ans}$$

La population atteindra 80 000 habitants vers l'année 2010 + 23,6 = 2033,6 (fin 2033 ou début 2034).

5. Algorithme Python :

```
P0 = 50000
a = 1.020
P = P0
t = 0
while P < 100000:
    P = P0 * (a ** t)
    if P >= 100000:
        print(f"Année {2010 + t}: {P:.0f} habitants")
        break
    t += 1
```

Correction 3 — (Acoustique) [Énoncé]

corrtext

1. Niveau de l'orateur :

$$L_1 = 10\log\left(\frac{2{,}5 \times 10^{-5}}{10^{-12}}\right) = 10\log(2{,}5 \times 10^7) = 10(\log(2{,}5) + 7)$$

$$= 10(0{,}398 + 7) = 10 \times 7{,}398 \approx 73{,}98 \approx 74{,}0 \text{ dB}$$

2. Intensité de la climatisation :

$$50 = 10\log\left(\frac{I_2}{10^{-12}}\right) \Rightarrow 5 = \log\left(\frac{I_2}{10^{-12}}\right)$$

$$\frac{I_2}{10^{-12}} = 10^5 \Rightarrow I_2 = 10^{-7} \text{ W/m}^2$$

3. Comparaison : $\frac{I_1}{I_2} = \frac{2{,}5\times10^{-5}}{10^{-7}} = 2{,}5 \times 10^2 = 250$
   L'orateur est environ 250 fois plus intense que la climatisation.
4. Intensité pour 55 dB :

$$I_3 = 10^{-12} \times 10^{5{,}5} = 10^{-6{,}5} \approx 3{,}16 \times 10^{-7} \text{ W/m}^2$$

   Intensité combinée (hypothèse additive) :

$$I_{\text{total}} = I_2 + I_3 = 10^{-7} + 3{,}16 \times 10^{-7} = 4{,}16 \times 10^{-7} \text{ W/m}^2$$

   Niveau combiné :

$$L_{\text{total}} = 10\log\left(\frac{4{,}16 \times 10^{-7}}{10^{-12}}\right) = 10\log(4{,}16 \times 10^5) \approx 10(5{,}62) \approx 56{,}2 \text{ dB}$$

Correction 4 — (Synthèse) [Énoncé]

corrtext

1. Simplification :

$$\begin{aligned}
&\log(a^2b) - \log\left(\frac{b^2}{a}\right) + \log(10)\\
&= \log(a^2) + \log(b) - (\log(b^2) - \log(a)) + 1\\
&= 2\log(a) + \log(b) - 2\log(b) + \log(a) + 1\\
&= 3\log(a) - \log(b) + 1
\end{aligned}$$

2. Résolution de $\log(x-3) + \log(x+2) = 1$:

$$\log((x-3)(x+2)) = 1 \Rightarrow (x-3)(x+2) = 10$$

$$x^2 - x - 6 = 10 \Rightarrow x^2 - x - 16 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+64}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{65}}{2}$$

   Conditions : $x > 3$ (pour que $x - 3 > 0$ et $x + 2 > 0$).
   Seule solution valide : $x = \frac{1+\sqrt{65}}{2} \approx 4{,}531$
3. Résolution de $2\log(x) \leq \log(16)$:

$$\log(x^2) \leq \log(16) \Rightarrow x^2 \leq 16 \Rightarrow |x| \leq 4$$

   Avec la condition $x > 0$, on obtient : $\boxed{0 < x \leq 4}$