

DS Blanc n°1

Logarithme décimal

Terminale Techno – Chapitre 3

Exercice 1 – 20 min (Automatismes) [Correction]

5 pts

Répondre aux questions suivantes sans calculatrice. Justifier brièvement les réponses.

No	Question	Réponse
1	Calculer $\log(100)$	
2	Résoudre $10^x = 1\,000$	
3	Calculer $\log(10)$	
4	Simplifier $\log(a^3)$	
5	Calculer $10^{\log(7)}$	
6	Résoudre $\log(x) = -2$	
7	Calculer $\log(0,001)$	
8	Simplifier $\log(ab) - \log(b)$	
9	Vrai ou faux : $\log(x^2) = 2 \log(x)$ pour tout $x > 0$	
10	Résoudre $10^{2x} = 100$	

Exercice 2 – 30 min (Radioactivité) [Correction]

6 pts

Une substance radioactive suit un modèle de désintégration exponentielle. La masse restante (en grammes) après t années est donnée par :

$$N(t) = N_0 \times 0,97^t$$

où $N_0 = 500$ g est la masse initiale.

- Quelle est la demi-vie de cette substance (temps pour que la masse soit réduite de moitié)? Exprimer le résultat en années, arrondi au dixième.
- Au bout de 20 ans, quelle masse reste-t-il de la substance? Arrondir à 0,1 g.
- Combien de temps faudra-t-il pour que la masse initiale soit réduite à 100 g? Détailler la résolution logarithmique.
- Tracer un croquis du graphe de $N(t)$ pour $t \in [0; 100]$ en indiquant la demi-vie sur l'axe des abscisses.

Exercice 3 – 25 min (Investissement) [Correction]

5 pts

Un capital initial de $C_0 = 5\,000$ € est placé à intérêts composés annuels.

- Après 10 ans avec un taux de 3,5% annuel, quel est le capital acquis? Arrondir à l'euro.
- Retrouver le taux annuel si le capital double en 12 ans. Détailler le calcul logarithmique.
- En combien de temps un capital triple-t-il à un taux de 2,8% annuel? Utiliser les logarithmes.

Exercice 4 – 25 min (Échelle log) [Correction]

4 pts

L'intensité d'un bruit est mesurée en décibels (dB) selon la formule :

$$L = 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

où I est l'intensité sonore (en W/m^2) et $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$ est l'intensité de référence (seuil d'audition).

1. Calculer le niveau sonore pour une intensité $I = 10^{-6} \text{ W/m}^2$.
2. Le bruit d'une rue passante est d'environ 70 dB. Retrouver l'intensité I correspondante. Exprimer en notation scientifique.
3. Comparer les intensités : un son de 80 dB est combien de fois plus intense qu'un son de 60 dB ?

DS BLANC N°1

Logarithme décimal

Correction 1 – (Automatismes) [Énoncé]

corrtext

- $\log(100) = 2$ (car $10^2 = 100$)
- $10^x = 1\,000 \Rightarrow x = 3$ (car $10^3 = 1\,000$)
- $\log(10) = 1$ (par définition)
- $\log(a^3) = 3 \log(a)$
- $10^{\log(7)} = 7$ (propriété inverse)
- $\log(x) = -2 \Rightarrow x = 10^{-2} = 0,01$
- $\log(0,001) = -3$ (car $10^{-3} = 0,001$)
- $\log(ab) - \log(b) = \log(a)$
- Faux : l'égalité est vraie seulement pour $x > 0$ (à vérifier pour les négatifs, d'où la restriction)
- $10^{2x} = 100 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1$

Correction 2 – (Radioactivité) [Énoncé]

corrtext

- Demi-vie : $0,5N_0 = N_0 \times 0,97^t$

$$0,5 = 0,97^t \Rightarrow \log(0,5) = t \log(0,97) \Rightarrow t = \frac{\log(0,5)}{\log(0,97)} \approx 22,8 \text{ ans}$$

- $N(20) = 500 \times 0,97^{20} \approx 500 \times 0,5438 \approx 271,9 \text{ g}$
- $100 = 500 \times 0,97^t \Rightarrow 0,2 = 0,97^t$

$$\log(0,2) = t \log(0,97) \Rightarrow t = \frac{\log(0,2)}{\log(0,97)} \approx 121,8 \text{ ans}$$

- Graphique : courbe décroissante et concave (exponentielle), passant par (0, 500) et (22,8, 250).

Correction 3 – (Investissement) [Énoncé]

corrtext

- Formule : $C = C_0(1+r)^n$ avec $C_0 = 5\,000$, $r = 0,035$, $n = 10$

$$C = 5\,000 \times 1,035^{10} \approx 5\,000 \times 1,4106 \approx 7\,053 \text{ €}$$

- Capital double en 12 ans : $2C_0 = C_0(1+r)^{12}$

$$2 = (1+r)^{12} \Rightarrow \log(2) = 12 \log(1+r)$$

$$\log(1+r) = \frac{\log(2)}{12} \approx \frac{0,301}{12} \approx 0,0251 \Rightarrow 1+r \approx 1,0592 \Rightarrow r \approx 5,9\%$$

- Capital triple : $3C_0 = C_0(1,028)^t$

$$3 = 1,028^t \Rightarrow \log(3) = t \log(1,028) \Rightarrow t = \frac{\log(3)}{\log(1,028)} \approx \frac{0,477}{0,0120} \approx 39,7 \text{ ans}$$

Correction 4 – (Échelle log) [Énoncé]

corrtext

1. $L = 10 \log\left(\frac{10^{-6}}{10^{-12}}\right) = 10 \log(10^6) = 10 \times 6 = 60 \text{ dB}$

2. Pour $L = 70 \text{ dB}$: $70 = 10 \log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right)$

$$7 = \log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right) \Rightarrow \frac{I}{10^{-12}} = 10^7 \Rightarrow I = 10^{-5} \text{ W/m}^2$$

3. Différence d'intensité : $80 - 60 = 20 \text{ dB}$

$$\frac{I_{80}}{I_{60}} = 10^{(80-60)/10} = 10^2 = 100$$

Un son à 80 dB est 100 fois plus intense qu'à 60 dB.