Chapitre 3 — Logarithme décimal

Terminale Technologique • Tronc commun

Table des matières

PROGRAMME (BO — TERMINALE TECHNOLOGIQUE)

Contenus : Définition : $\log(b)$ est l'unique solution de $10^x = b\,(b > 0)$. Sens de variation de $x \mapsto \log(x)$ sur $]0\,;+\infty[$. Propriétés algébriques : $\log(ab) = \log a + \log b$; $\log(a/b) = \log a - \log b$; $\log(a^n) = n \log a$. Équations/inéquations : $a^x = b$, $x^a = b$, $a^n < b$. Taux d'évolution moyen. Échelle logarithmique.

Démonstrations : (1) $\log(1/b) = -\log(b)$. (2) $\log(a/b) = \log(a) - \log(b)$.

Capacités : Utiliser la définition du logarithme décimal. Simplifier une expression avec des logarithmes. Résoudre des équations et inéquations avec le logarithme. Calculer un taux d'évolution moyen à l'aide du logarithme. Lire et interpréter une échelle logarithmique.

Tout le cours

Activités

Objectif : introduire le logarithme décimal comme exposant.

On cherche l'exposant x tel que $10^x = b$.

1. Résoudre mentalement : $10^x = 100$, $10^x = 1\,000$, $10^x = 0{,}01$.

2. À la calculatrice, trouver x tel que $10^x = 50$.

3. Vérifier que la touche log de la calculatrice donne la même valeur.

4. Compléter : $\log(50) \approx \ldots$ et $10^{\log(50)} = \ldots$

Correction. 1. $x = 2$, $x = 3$, $x = -2$.
2. $x \approx 1{,}699$.
3. $\log(50) \approx 1{,}699$. Oui.
4. $\log(50) \approx 1{,}699$ et $10^{\log(50)} = 50$.

Objectif : découvrir que le logarithme transforme un produit en somme.

À la calculatrice :

1. Calculer $\log(6)$, $\log(2)$, $\log(3)$. Que vaut $\log(2) + \log(3)$?

2. Calculer $\log(20)$ et $\log(100) - \log(5)$. Comparer.

3. Calculer $\log(8)$ et $3\log(2)$. Comparer.

4. Calculer $\log(1/4)$ et $-\log(4)$. Comparer.

5. Énoncer les quatre propriétés observées.

Correction. 1. $\log(2) + \log(3) = 0{,}301 + 0{,}477 = 0{,}778 = \log(6)$. $\log(ab) = \log a + \log b$.
2. $\log(20) = \log(100) - \log(5) = 2 - 0{,}699 = 1{,}301$. $\log(a/b) = \log a - \log b$.
3. $\log(8) = 3\log(2) = 0{,}903$. $\log(a^n) = n\log a$.
4. $\log(1/4) = -\log(4) = -0{,}602$. $\log(1/b) = -\log b$.
5. Produit → somme ; quotient → différence ; puissance → produit ; inverse → opposé.

Objectif : utiliser le logarithme pour résoudre $a^x = b$.

Un capital de 1 000 € est placé à 4 %/an. On cherche le nombre d'années n pour doubler.

1. Écrire l'équation à résoudre.

2. Prendre le logarithme des deux membres.

3. Isoler n.

4. Conclure.

Correction. 1. $1{,}04^n = 2$.
2. $n \log(1{,}04) = \log(2)$.
3. $n = \dfrac{\log(2)}{\log(1{,}04)} = \dfrac{0{,}301}{0{,}017} \approx 17{,}67$.
4. Il faut 18 ans pour doubler le capital.

1 Définition et propriétés fondamentales

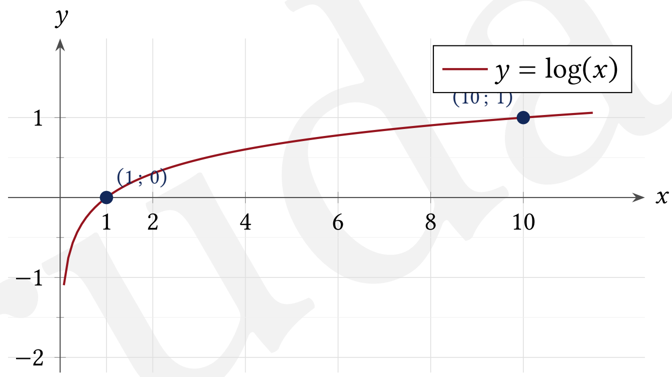
Définition. Pour tout $b > 0$, le **logarithme décimal** de b, noté $\log(b)$, est l'unique solution de l'équation $10^x = b$:

$$\boxed{10^x = b \iff x = \log(b)}$$

b	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{10}$	1	10	100	10^n
$\log(b)$	-2	-1	0	1	2	n

Propriétés fondamentales :

- $\log(10^x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- $10^{\log(x)} = x$ pour tout $x > 0$.
- $\log(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$.
- $\log(x) \leq 0 \Leftrightarrow 0 < x \leq 1$.



Sens de variation. La fonction log est **strictement croissante** sur $]0\,;+\infty[$:

$$\boxed{0 < a < b \iff \log(a) < \log(b)}$$

$\log(2) \approx 0{,}301$ $\log(3) \approx 0{,}477$ $\log(5) \approx 0{,}699$ $\log(7) \approx 0{,}845$

On remarque que $\log(5) = \log(10/2) = 1 - \log(2) \approx 0{,}699$.

2 Propriétés algébriques

Pour $a > 0$, $b > 0$, $n \in \mathbb{Z}$:

$$\boxed{\log(a \times b) = \log(a) + \log(b)} \qquad \boxed{\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)}$$

$$\boxed{\log\left(\frac{1}{b}\right) = -\log(b)} \qquad \boxed{\log(a^n) = n\log(a)}$$

Produit $a \times b$	$\longrightarrow$ **somme** des logarithmes
Quotient a/b	$\longrightarrow$ **différence** des logarithmes
Puissance a^n	$\longrightarrow$ le n **sort en facteur**
Inverse $1/b$	$\longrightarrow$ **opposé** du logarithme

$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log\left(a \times \frac{1}{b}\right) = \log(a) + \log\left(\frac{1}{b}\right) = \log(a) + \log(b^{-1}) = \log(a) - \log(b).$$

2.1 Méthode : simplifier une expression

Exemples.

Correction. $A = \log(4) + \log(25) = \log(4 \times 25) = \log(100) = 2$.
$B = 3\log(2) - \log(8) = \log(2^3) - \log(8) = \log(8) - \log(8) = 0$.
$C = 2\log(3) + \log(4) - \log(36) = \log(9) + \log(4) - \log(36) = \log\left(\frac{9\times4}{36}\right) = \log(1) = 0$.
Avec $\log(a) = 3$: $\log(a^2) = 6$, $\log(10a) = 1 + 3 = 4$, $\log(a/10) = 3 - 1 = 2$.

3 Équations et inéquations

Propriété fondamentale. Pour $a > 0$, $b > 0$:

$$\boxed{\log(a) = \log(b) \iff a = b}$$

Type	Méthode	Résultat
$a^x = b$	Prendre log des deux côtés	$x = \dfrac{\log(b)}{\log(a)}$
$x^a = b$ $(x > 0)$	Prendre log	$x = b^{1/a}$
$a^n < b$	Prendre log, attention au signe	Diviser par $\log(a)$

Exemples.

Correction. 1. $6^x = 2$: $x\log(6) = \log(2)$, $x = \dfrac{\log(2)}{\log(6)} \approx 0{,}387$.

2. $x^5 = 3$ $(x > 0)$: $5\log(x) = \log(3)$, $\log(x) = \dfrac{\log(3)}{5}$, $x = 3^{1/5} \approx 1{,}246$.

3. $3^x = 7$: $x = \dfrac{\log(7)}{\log(3)} \approx 1{,}771$.

4. $0{,}9^n < 0{,}5$: $n\log(0{,}9) < \log(0{,}5)$. Comme $\log(0{,}9) < 0$, on divise et on inverse : $n > \dfrac{\log(0{,}5)}{\log(0{,}9)} \approx 6{,}58$. Donc $n \geq 7$.

Inéquations. Comme log est croissante :

$$\log(a) < \log(b) \iff a < b \qquad (a, b > 0)$$

Attention en divisant par $\log(a)$: si $0 < a < 1$, alors $\log(a) < 0$ et le sens change !

4 Taux d'évolution moyen

Le taux moyen t_m vérifie $(1+t_m)^n = C$ où C est le coefficient multiplicateur global sur n périodes.

Avec le logarithme :

$$n\log(1+t_m) = \log(C) \implies \log(1+t_m) = \frac{\log(C)}{n} \implies \boxed{t_m = 10^{\log(C)/n} - 1}$$

Exemples.

Correction. 1. Prix : de 100 € à 160 € en 4 ans. $C = 1{,}6$.
$\log(1+t_m) = \dfrac{\log(1{,}6)}{4} = \dfrac{0{,}204}{4} = 0{,}051$. $1+t_m = 10^{0{,}051} \approx 1{,}125$. $t_m \approx 12{,}5$ %/an.

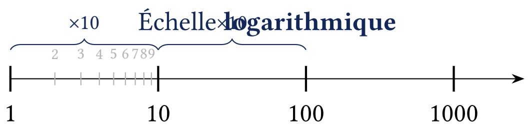
2. Gaz : +25 % en 3 ans. $C = 1{,}25$.
$\log(1+t_m) = \dfrac{\log(1{,}25)}{3} \approx \dfrac{0{,}097}{3} = 0{,}032$. $1+t_m \approx 1{,}077$. $t_m \approx 7{,}7$ %/an.

3. Population : −12 % en 6 ans. $C = 0{,}88$.
$\log(1+t_m) = \dfrac{\log(0{,}88)}{6} \approx \dfrac{-0{,}056}{6} = -0{,}009$. $t_m \approx -2{,}1$ %/an.

Combien d'années pour que $500 \times 1{,}03^n > 1\,000$?
$1{,}03^n > 2 \Rightarrow n > \dfrac{\log(2)}{\log(1{,}03)} \approx 23{,}4$. Il faut au moins **24 ans**.

5 Échelle logarithmique

Une **échelle logarithmique** place les graduations en $\log(x)$ plutôt qu'en x : les puissances de 10 sont régulièrement espacées.



Applications de l'échelle logarithmique :
- **Sismologie** : magnitude de Richter.
- **Acoustique** : niveau sonore en décibels.
- **Chimie** : pH d'une solution.
- **Astronomie, biologie, économie...**

Intérêt : représenter sur un même graphique des données variant de 1 à 1 000 000.

Le niveau sonore en décibels est $L = 10\log(I/I_0)$ où $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2.
Un son de 60 dB est 10^6 fois plus intense que le seuil d'audibilité.

6 Bilan comparatif

Notion	Formule
Définition	$10^x = b \Leftrightarrow x = \log(b)$
Produit	$\log(ab) = \log(a) + \log(b)$
Quotient	$\log(a/b) = \log(a) - \log(b)$
Puissance	$\log(a^n) = n\log(a)$
Inverse	$\log(1/b) = -\log(b)$
Résolution $a^x = b$	$x = \dfrac{\log(b)}{\log(a)}$
Taux moyen	$t_m = 10^{\log(C)/n} - 1 = C^{1/n} - 1$
Variations	log croissante sur $]0\,;+\infty[$

7 Exercice de synthèse

1. Calculer sans calculatrice : $\log(10^7)$, $\log(0{,}001)$, $\log(1)$, $10^{\log(5)}$.
2. Simplifier : $A = \log(4) + \log(25)$ $\quad B = 3\log(2) - \log(8)$ $\quad C = 2\log(3) + \log(4) - \log(36)$
3. Résoudre : **a)** $7^x = 3$ $\quad$ **b)** $x^4 = 5$ $(x > 0)$ $\quad$ **c)** $2^n > 1\,000$ $(n \in \mathbb{N})$
4. Un capital double en 10 ans. Quel est le taux annuel moyen ?
5. On sait que $\log(2) \approx 0{,}301$. Combien de chiffres a 2^{100} en base 10 ?

Correction. 1. $\log(10^7) = 7$, $\log(0{,}001) = \log(10^{-3}) = -3$, $\log(1) = 0$, $10^{\log(5)} = 5$.
2. $A = \log(100) = 2$. $B = \log(8) - \log(8) = 0$. $C = \log(9 \times 4/36) = \log(1) = 0$.
3. a) $x = \log(3)/\log(7) \approx 0{,}565$. b) $\log(x) = \log(5)/4$, $x = 5^{1/4} \approx 1{,}495$. c) $n > \log(1000)/\log(2) = 3/0{,}301 \approx 9{,}97$, donc $n \geq 10$.
4. $(1+t)^{10} = 2$, $t = 2^{1/10} - 1 \approx 7{,}18\,\%$/an.
5. $\log(2^{100}) = 100\log(2) = 30{,}1$. Donc 2^{100} a $\lfloor 30{,}1 \rfloor + 1 = \mathbf{31}$ chiffres.