

Chapitre 3 — Logarithme décimal

Terminale Technologique • Tronc commun

Table des matières

Activités	2
1 Définition et propriétés fondamentales	4
Définition et propriétés fondamentales	4
2 Propriétés algébriques	5
Propriétés algébriques	5
2.1 Méthode : simplifier une expression	5
3 Équations et inéquations	6
Équations et inéquations	6
4 Taux d'évolution moyen	7
Taux d'évolution moyen	7
5 Échelle logarithmique	8
Échelle logarithmique	8
6 Bilan comparatif	9
Bilan comparatif	9
7 Exercice de synthèse	10
Exercice de synthèse	10

PROGRAMME (BO — TERMINALE TECHNOLOGIQUE)

Contenus : Définition : $\log(b)$ est l'unique solution de $10^x = b$ ($b > 0$). Sens de variation de $x \mapsto \log(x)$ sur $]0; +\infty[$. Propriétés algébriques : $\log(ab) = \log a + \log b$; $\log(a/b) = \log a - \log b$; $\log(a^n) = n \log a$. Équations/inéquations : $a^x = b$, $x^a = b$, $a^n < b$. Taux d'évolution moyen. Échelle logarithmique.

Démonstrations : (1) $\log(1/b) = -\log(b)$. (2) $\log(a/b) = \log(a) - \log(b)$.

Capacités : Utiliser la définition du logarithme décimal. Simplifier une expression avec des logarithmes. Résoudre des équations et inéquations avec le logarithme. Calculer un taux d'évolution moyen à l'aide du logarithme. Lire et interpréter une échelle logarithmique.

Tout le cours



1 Définition et propriétés fondamentales

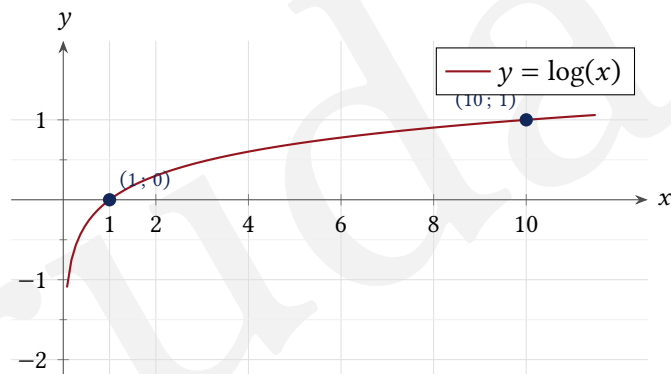
Définition. Pour tout $b > 0$, le **logarithme décimal** de b , noté $\log(b)$, est l'unique solution de l'équation $10^x = b$:

$$10^x = b \iff x = \log(b)$$

b	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{10}$	1	10	100	10^n
$\log(b)$	-2	-1	0	1	2	n

Propriétés fondamentales :

- $\log(10^x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- $10^{\log(x)} = x$ pour tout $x > 0$.
- $\log(x) \geq 0 \iff x \geq 1$.
- $\log(x) \leq 0 \iff 0 < x \leq 1$.



Sens de variation. La fonction \log est **strictement croissante** sur $]0; +\infty[$:

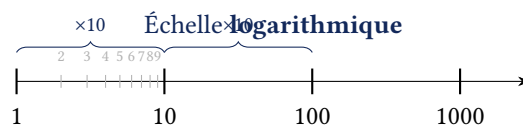
$$0 < a < b \iff \log(a) < \log(b)$$

$$\log(2) \approx 0,301 \quad \log(3) \approx 0,477 \quad \log(5) \approx 0,699 \quad \log(7) \approx 0,845$$

On remarque que $\log(5) = \log(10/2) = 1 - \log(2) \approx 0,699$.

5 Échelle logarithmique

Une **échelle logarithmique** place les graduations en $\log(x)$ plutôt qu'en x : les puissances de 10 sont régulièrement espacées.



Applications de l'échelle logarithmique :

- **Sismologie** : magnitude de Richter.
- **Acoustique** : niveau sonore en décibels.
- **Chimie** : pH d'une solution.
- **Astronomie, biologie, économie...**

Intérêt : représenter sur un même graphique des données variant de 1 à 1 000 000.

Le niveau sonore en décibels est $L = 10 \log(I/I_0)$ où $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$.
Un son de 60 dB est 10^6 fois plus intense que le seuil d'audibilité.

6 Bilan comparatif

Notion	Formule
Définition	$10^x = b \Leftrightarrow x = \log(b)$
Produit	$\log(ab) = \log(a) + \log(b)$
Quotient	$\log(a/b) = \log(a) - \log(b)$
Puissance	$\log(a^n) = n \log(a)$
Inverse	$\log(1/b) = -\log(b)$
Résolution $a^x = b$	$x = \frac{\log(b)}{\log(a)}$
Taux moyen	$t_m = 10^{\log(C)/n} - 1 = C^{1/n} - 1$
Variations	log croissante sur $]0; +\infty[$

