DS Blanc n°2 — Chapitre 2

Terminale Techno • Fonctions exponentielles

55 min • /20

Calculatrice autorisée. Justifier toutes les réponses.

Exercice 1 — QCM — 4 pts [Correction]

Pour chaque question, cocher la (ou les) bonne(s) réponse(s).

a) La fonction $f(x) = 1{,}5^x$ est :

- Croissante sur $\mathbb{R}$
- Décroissante sur $\mathbb{R}$
- Paire
- Impaire

b) Quel est l'ensemble image de la fonction $g(x) = 3 \times 0{,}4^x$?

- $\mathbb{R}$
- $[0, +\infty)$
- $(0, +\infty)$
- $[3, +\infty)$

c) Si $\left(\frac{5}{4}\right)^x = 100$, alors :

- $x = 100 \times \frac{4}{5}$
- $x = \frac{\log(100)}{\log(5/4)}$
- $x = 4\log(25)$
- x n'existe pas

d) La fonction $h(x) = a^x$ avec $a = 0{,}9$ passe par :

- $(0, 0)$
- $(0, 1)$
- $(1, 0{,}9)$
- $(-1, \frac{10}{9})$

e) Un placement de 1 000 € augmente de 4 % par an. Après 5 ans, le capital est :

- $1\,000 \times 1{,}04^5$
- Environ 1 217 €
- $1\,000 + 5 \times 40$ €
- $1\,000 \times 0{,}04^5$

Exercice 2 — Investissement — 5 pts [Correction]

Vous investissez 5 000 € à un taux d'intérêt composé de 5 % par an.

a) Exprimer le capital $C(n)$ après n années.

b) Calculer le capital après 3 ans (arrondir à 0,01 €).

c) Après combien d'années le capital aura-t-il doublé ? Résoudre par équation.

d) Interpréter économiquement le résultat de la question c).

e) Le modèle continu avec taux r donnerait $C(t) = 5\,000 \times e^{rt}$. Si $e^r \approx 1{,}05$, estimer r (arrondir à 0,001).

Exercice 3 — Croissance bactérienne — 5 pts [Correction]

Une population bactérienne suit le modèle $N(t) = N_0 \times 2^{t/d}$ où t est le temps en heures et d est le temps de doublement.

a) Avec $N_0 = 1\,000$ bactéries et $d = 3$ heures, calculer la population après 6 heures.

b) Après combien de temps la population aura-t-elle atteint 8 000 bactéries ?

c) Déterminer le temps de demi-vie (le temps nécessaire pour que la population se réduise de moitié). Exprimer en fonction de d.

d) Calculer le taux de croissance moyen par heure (en pourcentage) sachant que la population double en 3 heures.

e) Interpréter biologiquement : qu'est-ce que cela signifie si d diminue ?

Exercice 4 — Python et synthèse — 6 pts [Correction]

Considérez l'algorithme suivant :

```python
def suite_exponentielle(a, n):
    resultat = 1
    for i in range(n):
        resultat = resultat * a
    return resultat

print(suite_exponentielle(2, 5))
```

a) Exécuter mentalement l'algorithme avec $a = 2$ et $n = 5$. Quel est le résultat ?

b) Que calcule précisément cet algorithme ? Écrire la formule mathématique correspondante.

c) Écrire une variante de cet algorithme qui calcule la somme $S_n = 1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1}$ (somme d'une suite géométrique).

d) Pour $a = 1{,}06$ et $n = 10$, interpréter le résultat de votre algorithme dans un contexte de placement financier.

e) Quel serait l'avantage d'utiliser la formule classique $S_n = \frac{a^n - 1}{a - 1}$ au lieu de la boucle ?

f) Modifier votre code pour ajouter un compteur d'itérations et afficher le nombre de multiplications effectuées.

Barème : Ex.1 : 4 pts • Ex.2 : 5 pts • Ex.3 : 5 pts • Ex.4 : 6 pts • **Total : 20 pts**

Corrigé — DS Blanc n°2 — Ch.2

Fonctions exponentielles

Correction 1 — QCM [Énoncé]

a) La fonction $f(x) = 1{,}5^x$ (base > 1) est **croissante sur $\mathbb{R}$**. **(Réponse : case 1)**

b) $g(x) = 3 \times 0{,}4^x$: la base $0{,}4 \in (0, 1)$ donc $0{,}4^x \in (0, +\infty)$ et $g(x) \in (0, +\infty)$. **(Réponse : case 3)**

c) Si $\left(\frac{5}{4}\right)^x = 100$, alors $x = \frac{\log(100)}{\log(5/4)}$ en prenant le logarithme des deux côtés. **(Réponse : case 2)**

d) $h(x) = 0{,}9^x$: $h(0) = 0{,}9^0 = 1$, donc passe par $(0, 1)$ et $h(1) = 0{,}9$, donc passe par $(1, 0{,}9)$. Pour $h(-1) = 0{,}9^{-1} = \frac{1}{0{,}9} = \frac{10}{9}$. **(Réponses : cases 2, 3, 4)**

e) Capital $1\,000 \times 1{,}04^5$ après 5 ans à 4 % par an. On a $1{,}04^5 \approx 1{,}217$, donc $1\,000 \times 1{,}217 = 1\,217$ €. **(Réponses : cases 1, 2)**

Correction 2 — Investissement [Énoncé]

a) Le capital augmente de 5 % par an, donc est multiplié par 1,05 chaque année. Après n années :

$$C(n) = 5\,000 \times 1{,}05^n \text{ euros}$$

b) Après 3 ans :

$$C(3) = 5\,000 \times 1{,}05^3 \approx 5\,000 \times 1{,}1576 \approx 5\,788{,}13 \text{ €}$$

c) On cherche n tel que $C(n) = 2 \times C(0) = 10\,000$:

$$5\,000 \times 1{,}05^n = 10\,000 \quad \Rightarrow \quad 1{,}05^n = 2$$

En prenant le logarithme :

$$n \log(1{,}05) = \log(2) \quad \Rightarrow \quad n = \frac{\log(2)}{\log(1{,}05)} \approx \frac{0{,}693}{0{,}0488} \approx 14{,}2 \text{ ans}$$

Donc après environ **14,2** ans ou **14** ans et 2-3 mois.

d) Économiquement, cela signifie qu'en investissant 5 000 € à 5 % par an, le capital double (atteint 10 000 €) en environ 14 ans et demi. C'est une mesure du temps de réalisation du rendement de l'investissement.

e) Si $e^r \approx 1{,}05$, alors $r = \ln(1{,}05) \approx 0{,}0488 \approx \mathbf{0{,}049}$ (arrondi à 3 décimales : $r \approx 0{,}049$ ou 4,9 % par an continu).

Correction 3 — Croissance bactérienne [Énoncé]

a) Avec $N_0 = 1\,000$, $d = 3$ et $t = 6$:

$$N(6) = 1\,000 \times 2^{6/3} = 1\,000 \times 2^2 = 1\,000 \times 4 = \mathbf{4\,000} \text{ bactéries}$$

b) On cherche t tel que $N(t) = 8\,000$:

$$1\,000 \times 2^{t/3} = 8\,000 \quad \Rightarrow \quad 2^{t/3} = 8 = 2^3 \quad \Rightarrow \quad \frac{t}{3} = 3 \quad \Rightarrow \quad t = \mathbf{9} \text{ heures}$$

c) Le temps de demi-vie $t_{1/2}$ vérifie $N(t_{1/2}) = \frac{N_0}{2}$:

$$N_0 \times 2^{t_{1/2}/d} = \frac{N_0}{2} \quad \Rightarrow \quad 2^{t_{1/2}/d} = 2^{-1} \quad \Rightarrow \quad \frac{t_{1/2}}{d} = -1 \quad \Rightarrow \quad t_{1/2} = -d$$

(Remarque : le temps de demi-vie est négatif, ce qui correspond au "passé". Cela signifie que si on remonte de d heures, la population était moitié moins nombreuse.)
Formulation correcte : **temps de réduction de moitié = $-d$** ou équivalemment, si on regarde vers le passé, il y a d heures la population était moitié moindre.

d) Le taux de croissance moyen par heure : la population double en 3 heures, donc $N(3) = 2 \times N(0)$.
Le taux constant τ vérifie $(1+\tau)^3 = 2$, donc $1 + \tau = 2^{1/3} \approx 1{,}26$, d'où $\tau \approx 0{,}26$ ou **26** % par heure.

e) Biologiquement, si d diminue, cela signifie que la population double plus rapidement. Les bactéries se reproduisent plus vite, ce qui peut indiquer des conditions plus favorables (meilleure température, plus de nutriments, etc.).

Correction 4 — Python et synthèse [Énoncé]

a) Exécution avec $a = 2$, $n = 5$:
- Itération 0 : resultat $= 1 \times 2 = 2$
- Itération 1 : resultat $= 2 \times 2 = 4$
- Itération 2 : resultat $= 4 \times 2 = 8$
- Itération 3 : resultat $= 8 \times 2 = 16$
- Itération 4 : resultat $= 16 \times 2 = 32$

Le résultat est **32**.

b) L'algorithme calcule $\mathbf{a^n}$, c'est-à-dire $\mathbf{2^5} = \mathbf{32}$ dans ce cas.

c) Variante pour la somme géométrique $S_n = 1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1}$:

```python
def somme_geometrique(a, n):
    somme = 0
    for i in range(n):
        somme = somme + (a ** i)
    return somme

# Alternative plus efficace
def somme_geometrique(a, n):
    if a == 1:
        return n
    else:
        return (a ** n - 1) / (a - 1)
```

d) Pour $a = 1{,}06$ et $n = 10$: on calcule $S_{10} = 1 + 1{,}06 + 1{,}06^2 + \cdots + 1{,}06^9$.
En contexte financier, si on place C euros chaque année à 6 % de rendement, après 10 ans le capital total accumulé (avec intérêts composés) est $C \times S_{10}$.
Numériquement : $S_{10} = \frac{1{,}06^{10}-1}{1{,}06-1} \approx \frac{1{,}791-1}{0{,}06} \approx 13{,}18$.

e) Avantage de la formule $S_n = \frac{a^n-1}{a-1}$:
- Calcul immédiat en temps constant (une seule exponentiation au lieu de n itérations).
- Pas d'erreur d'arrondi cumulée par les boucles.
- Plus efficace pour grandes valeurs de n (gain de performance).

f) Code avec compteur d'itérations :

```python
def suite_exponentielle(a, n):
    resultat = 1
    iterations = 0
    for i in range(n):
        resultat = resultat * a
        iterations += 1
    print(f"Nombre d'iterations: {iterations}")
    print(f"Nombre de multiplications: {n}")
    return resultat

resultat = suite_exponentielle(2, 5)
print(f"Resultat: {resultat}")
```

Pour $n = 5$, il y a **5 itérations** et **5 multiplications**.