DS Blanc n°1 — Chapitre 2

Terminale Techno • Fonctions exponentielles

55 min • /20

Calculatrice autorisée. Justifier toutes les réponses.

Exercice 1 — Automatismes — 4 pts [Correction]

Pour chaque question, indiquer la réponse correcte ou calculer.

a) Simplifier : $\dfrac{2^5 \times 2^{-3}}{2^2} =$ ....

b) Comparer sans calculatrice : $\left(\frac{1}{3}\right)^4$ et $\left(\frac{1}{3}\right)^5$

c) La fonction $f(x) = 0{,}7^x$ est-elle croissante ou décroissante ? Justifier.

d) Calculer : $5^0 + 3 \times 2^{-2} =$ ....

e) Résoudre : $2^x = 32$

f) Simplifier : $(3^2)^{-1} \times 3^5 =$ ....

Exercice 2 — Radioactivité — 5 pts [Correction]

Le carbone 14 se désintègre progressivement. La masse restante après t années est donnée par :

$$m(t) = m_0 \times 0{,}85^t$$

où m_0 est la masse initiale.

a) Interpréter le coefficient 0,85 : quel pourcentage de masse disparaît chaque année ?

b) On dispose de 100 g de carbone 14. Calculer la masse restante après 10 ans (arrondir à 0,01 g).

c) À partir de quelle année la masse devient-elle inférieure à 50 g ? Justifier par calcul ou graphique.

d) Expliquer pourquoi on dit que c'est un phénomène exponentiel décroissant.

Exercice 3 — Taux d'évolution — 5 pts [Correction]

Un loyer initial est de 600 euros en 2020. Chaque année, il augmente de 3 %.

a) Exprimer le loyer $L(n)$ après n années en fonction de n.

b) Calculer le loyer en 2025 (arrondir à 0,01 €).

c) Déterminer le taux moyen annuel d'augmentation sur les 5 années (vérifier à partir de votre expression).

d) À partir de quelle année le loyer aura-t-il augmenté d'au moins 20 % par rapport à 2020 ? Résoudre par inéquation.

Exercice 4 — Étude complète — 6 pts [Correction]

On considère la fonction $f(x) = k \times a^x$ où k et a sont des constantes à déterminer.
Les points suivants appartiennent à la courbe : $A(0, 2)$ et $B(2, 8)$.

a) Montrer que $k = 2$ et $a = 2$.

b) Étudier les variations de $f(x) = 2 \times 2^x$ sur $\mathbb{R}$ et donner son ensemble image.

c) Résoudre l'équation $f(x) = 16$ analytiquement.

d) Résoudre l'inéquation $f(x) \geq 32$.

e) Compléter l'algorithme Python suivant qui calcule $f(x)$:

```python
def f(x):
    k = ...
    a = ...
    return k * (a ** x)

print(f(3))  # Doit afficher 16
```

Barème : Ex.1 : 4 pts • Ex.2 : 5 pts • Ex.3 : 5 pts • Ex.4 : 6 pts • **Total : 20 pts**

ibrahim-rudasingwa

Corrigé — DS Blanc n°1 — Ch.2

Fonctions exponentielles

Correction 1 — Automatismes [Énoncé]

a) $\dfrac{2^5 \times 2^{-3}}{2^2} = \dfrac{2^{5-3}}{2^2} = \dfrac{2^2}{2^2} = 2^0 = 1$

b) $\left(\frac{1}{3}\right)^4 > \left(\frac{1}{3}\right)^5$ car la base $\frac{1}{3} \in (0,1)$, donc la fonction $x \mapsto (1/3)^x$ est décroissante. Comme $4 < 5$, on a $(1/3)^4 > (1/3)^5$.

c) La fonction $f(x) = 0{,}7^x$ est décroissante car la base $0{,}7 \in (0,1)$. Pour une exponentielle a^x avec $0 < a < 1$, la fonction décroît.

d) $5^0 + 3 \times 2^{-2} = 1 + 3 \times \frac{1}{4} = 1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4} = 1{,}75$

e) $2^x = 32$: On reconnaît $32 = 2^5$, donc $2^x = 2^5$, d'où $x = 5$.

f) $(3^2)^{-1} \times 3^5 = 3^{-2} \times 3^5 = 3^{-2+5} = 3^3 = 27$

Correction 2 — Radioactivité [Énoncé]

a) Le coefficient 0,85 signifie que chaque année, 85 % de la masse restante persiste (ou 15 % disparaît). La masse décroît de 15 % par an.

b) Après 10 ans : $m(10) = 100 \times 0{,}85^{10}$.
Calcul : $0{,}85^{10} \approx 0{,}1969$, donc $m(10) \approx 100 \times 0{,}1969 = 19{,}69$ g.

c) On cherche t tel que $m(t) < 50$:

$$100 \times 0{,}85^t < 50 \quad \Rightarrow \quad 0{,}85^t < 0{,}5 \quad \Rightarrow \quad t\log(0{,}85) < \log(0{,}5)$$

Puisque $\log(0{,}85) < 0$ (la base est entre 0 et 1), on divise en inversant l'inégalité :

$$t > \frac{\log(0{,}5)}{\log(0{,}85)} \approx \frac{-0{,}301}{-0{,}162} \approx 4{,}86$$

Donc à partir de l'année 5 (ou année 2025 si $t = 0$ en 2020), la masse est inférieure à 50 g.

d) C'est un phénomène exponentiel décroissant car on a une fonction de la forme $m(t) = m_0 \times a^t$ avec $0 < a < 1$ (ici $a = 0{,}85$). La masse décroît exponentiellement (rapidement au départ, puis plus lentement) vers 0.

Correction 3 — Taux d'évolution [Énoncé]

a) Le loyer augmente chaque année de 3 %, donc est multiplié par 1,03 chaque année. Après n années :

$$L(n) = 600 \times 1{,}03^n \text{ euros}$$

b) En 2025, $n = 5$ (puisque 2025 - 2020 = 5) :

$$L(5) = 600 \times 1{,}03^5 \approx 600 \times 1{,}1593 \approx 695{,}58 \text{ €}$$

c) Le taux moyen annuel sur 5 années est de 3 % par définition (c'est le taux constant appliqué chaque année dans le modèle exponentiel). Vérification : multiplier par 1,03 cinq fois d'affilée donne le même résultat que $1{,}03^5$.

d) On cherche n tel que $L(n) \geq 600 \times 1{,}2$ (augmentation de 20 %) :

$$600 \times 1{,}03^n \geq 720 \quad \Rightarrow \quad 1{,}03^n \geq 1{,}2$$

En prenant le logarithme :

$$n\log(1{,}03) \geq \log(1{,}2) \quad \Rightarrow \quad n \geq \frac{\log(1{,}2)}{\log(1{,}03)} \approx \frac{0{,}1823}{0{,}0296} \approx 6{,}16$$

Donc à partir de $n = 7$, soit en 2027, le loyer aura augmenté d'au moins 20 %.

Correction 4 — Étude complète [**Énoncé**]

a) Les points $A(0,2)$ et $B(2,8)$ satisfont $f(x) = k \times a^x$.
Pour $A(0,2)$: $f(0) = k \times a^0 = k \times 1 = k = 2$.
Pour $B(2,8)$: $f(2) = 2 \times a^2 = 8 \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$ (car $a > 0$).
Donc $f(x) = 2 \times 2^x$.

b) $f(x) = 2 \times 2^x = 2^{x+1}$. Puisque la base $2 > 1$, la fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
L'ensemble image est $(0, +\infty)$ car $\lim_{x\to-\infty} 2^{x+1} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} 2^{x+1} = +\infty$.

c) Résoudre $f(x) = 16$:

$$2 \times 2^x = 16 \quad \Rightarrow \quad 2^x = 8 \quad \Rightarrow \quad 2^x = 2^3 \quad \Rightarrow \quad x = 3$$

d) Résoudre $f(x) \geq 32$:

$$2 \times 2^x \geq 32 \quad \Rightarrow \quad 2^x \geq 16 \quad \Rightarrow \quad 2^x \geq 2^4 \quad \Rightarrow \quad x \geq 4$$

L'ensemble solution est $[4, +\infty)$.

e) L'algorithme complété :

```python
def f(x):
    k = 2
    a = 2
    return k * (a ** x)

print(f(3))  # Affiche 2 * (2**3) = 2 * 8 = 16
```