Chapitre 2 — Fonctions exponentielles

Terminale Technologique • Tronc commun

Table des matières

PROGRAMME (BO — TERMINALE TECHNOLOGIQUE)

Contenus : Fonction $x \mapsto a^x$ ($a > 0$) comme modèle continu d'évolution relative constante. Lien avec les suites géométriques. Propriétés algébriques. Sens de variation selon a et le signe de k dans $x \mapsto ka^x$. Taux d'évolution moyen : exposant $\frac{1}{n}$.

Démonstrations : (1) Propriétés algébriques de a^x (admises). (2) Sens de variation de $x \mapsto ka^x$.

Capacités : Simplifier une expression avec des exponentielles. Étudier les variations de $x \mapsto ka^x$. Résoudre des équations et inéquations exponentielles. Calculer un taux d'évolution moyen. Utiliser la calculatrice ou Python pour résoudre des problèmes de seuil.

Tout le cours

Activités

Objectif : comprendre le passage des suites géométriques à la fonction exponentielle.

Un capital de 1 000 € est placé à un taux annuel de 5 %. On note u_n le capital après n années entières : $u_n = 1\,000 \times 1{,}05^n$.

1. Calculer u_0, u_1, u_2, u_5, u_{10}.

2. Peut-on calculer le capital après 6 mois ($n = 0{,}5$) ? Et après 3 ans et 4 mois ($n = 3{,}33$) ?

3. On définit $f(x) = 1\,000 \times 1{,}05^x$ pour tout réel $x \geq 0$. Calculer $f(0{,}5)$, $f(3{,}33)$ à la calculatrice.

4. Que représente la fonction f par rapport à la suite (u_n) ?

Correction. 1. $u_0 = 1\,000$, $u_1 = 1\,050$, $u_2 = 1\,102{,}50$, $u_5 \approx 1\,276{,}28$, $u_{10} \approx 1\,628{,}89$.
2. Avec la suite, n est entier. On ne peut pas calculer directement.
3. $f(0{,}5) = 1\,000 \times 1{,}05^{0{,}5} \approx 1\,024{,}70$ €. $f(3{,}33) \approx 1\,175{,}22$ €.
4. f prolonge la suite (u_n) à tous les réels : c'est le modèle continu de l'évolution.

Bilan 1. La suite géométrique $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ se prolonge en la **fonction exponentielle de base** a : $f(x) = a^x$, définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Objectif : retrouver les règles de calcul des puissances.

On prend $a = 2$.

1. Vérifier à la calculatrice que $2^3 \times 2^5 = 2^8$.

2. Calculer $2^{4{,}2} \times 2^{1{,}8}$. Comparer à 2^6.

3. Calculer $\dfrac{2^7}{2^3}$. Comparer à 2^4.

4. Calculer $(2^3)^4$. Comparer à 2^{12}.

5. Calculer 2^{-3}. Comparer à $\dfrac{1}{2^3}$.

6. Formuler les quatre règles observées.

Correction. 1. $2^3 \times 2^5 = 8 \times 32 = 256 = 2^8$. Oui.
2. $2^{4{,}2} \times 2^{1{,}8} = 2^6 = 64$. Oui.
3. $2^7/2^3 = 128/8 = 16 = 2^4$. Oui.
4. $(2^3)^4 = 8^4 = 4\,096 = 2^{12}$. Oui.
5. $2^{-3} = 0{,}125 = 1/8 = 1/2^3$. Oui.
6. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$; $a^x/a^y = a^{x-y}$; $(a^x)^n = a^{nx}$; $a^{-x} = 1/a^x$.

Objectif : observer graphiquement le comportement de $x \mapsto a^x$.

À la calculatrice, tracer les courbes de $f(x) = 2^x$, $g(x) = 0{,}5^x$ et $h(x) = -3 \times 2^x$.

1. f est-elle croissante ou décroissante ? Quel est le signe de $f(x)$?

2. g est-elle croissante ou décroissante ? Que vaut $g(0)$?

3. h est-elle croissante ou décroissante ? Quel est le signe de $h(x)$?

4. Compléter : si $a > 1$ et $k > 0$, alors $x \mapsto ka^x$ est ...

5. Compléter : si $0 < a < 1$ et $k > 0$, alors $x \mapsto ka^x$ est ...

Correction. 1. f strictement croissante, $f(x) > 0$ pour tout x.
2. g strictement décroissante, $g(0) = 1$.
3. h strictement décroissante, $h(x) < 0$ pour tout x.
4. strictement croissante.
5. strictement décroissante.

1 Définition et lien avec les suites géométriques

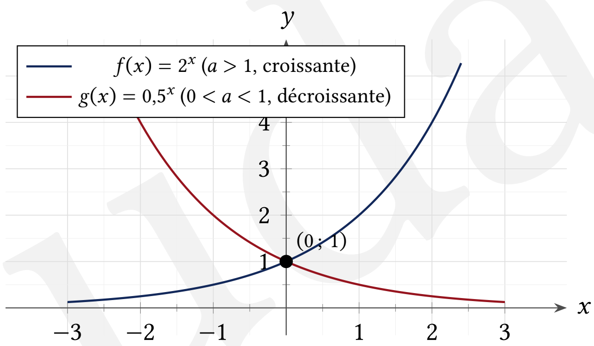
Soit $a > 0$. La **fonction exponentielle de base** a est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = a^x$$

Elle prolonge la suite géométrique (a^n) aux valeurs réelles.

Propriétés fondamentales :
— $a^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (la fonction est **strictement positive**).
— $a^0 = 1$ pour tout $a > 0$.
— $a^1 = a$.

Si (u_n) est géométrique de raison $q > 0$ et de premier terme u_0, alors $u_n = u_0 \times q^n$. En prolongeant : la fonction $f(x) = u_0 \times q^x$ modélise l'évolution de façon **continue**.



2 Propriétés algébriques

Pour $a > 0$ et tous réels x, y :

$$\boxed{a^x \times a^y = a^{x+y}} \quad \boxed{\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}} \quad \boxed{(a^x)^n = a^{nx}} \quad \boxed{a^{-x} = \frac{1}{a^x}}$$

De plus : $a^0 = 1$ et $a^1 = a$.

$a^x \times a^y$	$\longrightarrow$ on **additionne** les exposants : $x + y$
a^x / a^y	$\longrightarrow$ on **soustrait** les exposants : $x - y$
$(a^x)^n$	$\longrightarrow$ on **multiplie** les exposants : nx
a^{-x}	$\longrightarrow$ on **inverse** : $\dfrac{1}{a^x}$

2.1 Méthode : simplifier une expression

Stratégie : ramener à la même base, puis appliquer les règles.

Exemples.

Correction. $A = 4^{-3} \times 4^{-5} = 4^{-8}$.

$B = \dfrac{3^3 \times 3^{-2,5}}{9^5} = \dfrac{3^{0,5}}{(3^2)^5} = \dfrac{3^{0,5}}{3^{10}} = 3^{-9,5}$.

$C = (4{,}8^{-2,1})^3 \times 4{,}8^{6,2} = 4{,}8^{-6,3} \times 4{,}8^{6,2} = 4{,}8^{-0,1}$.

3 Équations et inéquations exponentielles

Propriété fondamentale. Pour $a > 0$, $a \neq 1$:

$$\boxed{a^x = a^y \iff x = y}$$

La fonction $x \mapsto a^x$ est **strictement monotone**, donc **injective**.

1. Ramener les deux membres à la **même base** a.
2. Identifier les exposants : $f(x) = g(x)$.
3. Résoudre l'équation obtenue.

Exemples.

Correction. 1. $5^{2x} = 5 \iff 2x = 1 \iff x = \frac{1}{2}$.
2. $\frac{1}{2} \times 2^{x-1} = 2^{4-x} \iff 2^{-1} \times 2^{x-1} = 2^{4-x} \iff 2^{x-2} = 2^{4-x} \iff x - 2 = 4 - x \iff x = 3$.
3. $(\sqrt{5})^{1-x} = 5^{1-x} \iff 5^{(1-x)/2} = 5^{1-x} \iff \frac{1-x}{2} = 1 - x \iff 1 - x = 2 - 2x \iff x = 1$.

Inéquations. Pour $a > 1$: $a^x \leq a^y \iff x \leq y$ (même sens).
Pour $0 < a < 1$: $a^x \leq a^y \iff x \geq y$ (sens contraire).

Correction. Exemple : $9^{0,5x+0,5} < 3^{7x-2}$.
$(3^2)^{0,5x+0,5} < 3^{7x-2} \iff 3^{x+1} < 3^{7x-2}$.
Comme $3 > 1$: $x + 1 < 7x - 2 \iff -6x < -3 \iff x > \frac{1}{2}$.
$S = \left]\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$.

4 Sens de variation

Pour $f(x) = ka^x$ avec $a > 0$, $a \neq 1$, $k \neq 0$:

	$a > 1$	$0 < a < 1$
$k > 0$	f **strictement croissante**	f **strictement décroissante**
$k < 0$	f **strictement décroissante**	f **strictement croissante**

Exemples.

Correction. 1. $f(x) = 1{,}01^x$: $a = 1{,}01 > 1$, $k = 1 > 0 \Rightarrow$ **croissante**.
2. $f(x) = 0{,}05^x$: $a = 0{,}05 < 1$, $k = 1 > 0 \Rightarrow$ **décroissante**.
3. $f(x) = 0{,}99^{0{,}5x} = (\sqrt{0{,}99})^x = (0{,}995\ldots)^x$: $a < 1$, $k = 1 \Rightarrow$ **décroissante**.
4. $f(x) = -\frac{1{,}5^x}{2}$: $a = 1{,}5 > 1$, $k = -\frac{1}{2} < 0 \Rightarrow$ **décroissante**.
5. $f(x) = 2(\sqrt{2})^x = 2 \times (\sqrt{2})^x$: $a = \sqrt{2} > 1$, $k = 2 > 0 \Rightarrow$ **croissante**.

4.1 Déterminer k et a à partir de conditions

Exemple. Soit $g(x) = ka^x$ avec $g(0) = \frac{1}{2}$ et $g(2) = 8$.

Correction. $g(0) = ka^0 = k = \frac{1}{2}$. Donc $k = \frac{1}{2}$.
$g(2) = \frac{1}{2}a^2 = 8 \Rightarrow a^2 = 16 \Rightarrow a = 4$ (car $a > 0$).
Conclusion : $g(x) = \frac{1}{2} \times 4^x$. Comme $a = 4 > 0$, g est croissante.

5 Taux d'évolution moyen — Exposant $\frac{1}{n}$

Une grandeur subit n évolutions successives. Le **coefficient multiplicateur global** est C. Le **taux moyen** t_m est le taux unique qui, appliqué n fois, produit le même effet :

$$(1+t_m)^n = C$$

$$\boxed{1+t_m = C^{1/n} = \sqrt[n]{C}} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{t_m = C^{1/n} - 1}$$

Rappel : $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$.

Exemples.

Correction. 1. Un prix passe de 100 € à 160 € en 4 ans.
$C = 160/100 = 1{,}6$. $1+t_m = 1{,}6^{1/4} \approx 1{,}1247$. $t_m \approx 12{,}5$ %/an.

2. Un prix passe de 250 € à 150 € en 10 ans.
$C = 150/250 = 0{,}6$. $1+t_m = 0{,}6^{1/10} \approx 0{,}9499$. $t_m \approx -5{,}0$ %/an.

3. Loyer : +16,3 % de 2009 à 2019 (10 ans).
$C = 1{,}163$. $1+t_m = 1{,}163^{1/10} \approx 1{,}0152$. $t_m \approx 1{,}5$ %/an.

Le taux moyen n'est **pas** la moyenne arithmétique des taux ! Il se calcule avec la racine n-ième du coefficient multiplicateur global.

6 Problèmes de modélisation

6.1 Population en croissance

Une ville de 200 000 habitants croît de 3,5 % par an. Le nombre d'habitants (en milliers) après x années est $f(x) = 200 \times 1{,}035^x$.

1. $f(5) = 200 \times 1{,}035^5 \approx 237{,}5$ milliers.
2. $f(10) \approx 282{,}1$ milliers.
3. $f(x) > 500 \iff 1{,}035^x > 2{,}5$. Par calculatrice : $x \geq 27$ ans.

6.2 Décroissance (médicament, radioactivité)

La concentration d'un médicament est $h(t) = 16 \times 0{,}8^t$ (mg/L), t en heures.

1. Concentration initiale : $h(0) = 16$ mg/L.
2. $0 < 0{,}8 < 1$ et $16 > 0$: h décroissante. La concentration diminue.
3. Divisée par 2 : $h(t) = 8 \iff 0{,}8^t = 0{,}5$. Par calc. : $t \approx 3{,}1$ h.
4. $h(t) < 0{,}1 \iff 0{,}8^t < 0{,}00625$. Par calc. : $t > 22{,}8$ h.

6.3 Python : recherche de seuil

```python
def seuil(u0, a, s):
    """Plus petit x entier tel que u0 * a^x >= s."""
    u = u0
    x = 0
    while u < s:
        u = u * a
        x = x + 1
    return x
```

Exemple : `seuil(200, 1.035, 500)` renvoie 27.

7 Bilan comparatif

	$a > 1$	$0 < a < 1$
Fonction	$f(x) = a^x$	$f(x) = a^x$
Monotonie ($k > 0$)	Strictement croissante	Strictement décroissante
Comportement	Croissance exponentielle	Décroissance exponentielle
Modèle	Croissance de population, intérêts composés	Radioactivité, médicament, dépréciation
Image de 0	$a^0 = 1$	$a^0 = 1$
Signe	$a^x > 0$ toujours	$a^x > 0$ toujours

Résumé des formules :

— $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ $\quad \dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ $\quad (a^x)^n = a^{nx}$ $\quad a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$

— $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$

— Taux moyen : $t_m = C^{1/n} - 1$

— Pour résoudre $a^{f(x)} = a^{g(x)}$: on identifie $f(x) = g(x)$

— Inéquations : même sens si $a > 1$, sens contraire si $0 < a < 1$

8 Exercice de synthèse

1. Simplifier : $A = \dfrac{5^3 \times 5^{-1,5}}{25^2}$ $\quad B = (2^{-3})^2 \times 8^2$ $\quad C = \dfrac{3^{2,5} \times 3^{-0,5}}{3^{-1}}$
2. Étudier les variations de : $f(x) = 1{,}5^x$ $\quad g(x) = -4 \times 0{,}3^x$ $\quad h(x) = 2 \times 7^x$
3. Un capital de 1 000 € est placé à 5 %/an.
   a) Exprimer u_n après n années. **b)** Valeur après 10 ans ? **c)** Taux mensuel équivalent ?
4. Évolutions +20 %, −5 %, +10 %.
   a) Taux global. **b)** Taux moyen par étape.
5. Tracer $f(x) = 2^x$ et $g(x) = 2^{-x}$. Que remarque-t-on ? Justifier.

Correction. 1. $A = \frac{5^{1,5}}{5^4} = 5^{-2,5}$. $B = 2^{-6} \times 2^6 = 1$. $C = \frac{3^2}{3^{-1}} = 3^3 = 27$.
2. f croissante ($1{,}5 > 1$, $k = 1$). g croissante ($0{,}3 < 1$, $k = -4 < 0$). h croissante ($7 > 1$, $k = 2 > 0$).
3. a) $u_n = 1\,000 \times 1{,}05^n$. b) $u_{10} \approx 1\,628{,}89$ €. c) $(1+t)^{12} = 1{,}05 \Rightarrow t = 1{,}05^{1/12} - 1 \approx 0{,}407$ %.
4. a) $C = 1{,}2 \times 0{,}95 \times 1{,}1 = 1{,}254$. Taux global = +25,4 %.
b) $t_m = 1{,}254^{1/3} - 1 \approx 7{,}84$ %.
5. Les courbes sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées car $2^{-x} = (1/2)^x$. Si $f(x) = 2^x$ alors $g(x) = f(-x)$.