Chapitre 2 — Fonctions exponentielles

Terminale Technologique • Tronc commun

Table des matières

PROGRAMME (BO — TERMINALE TECHNOLOGIQUE)

Contenus : Fonction $x \mapsto a^x$ ($a > 0$) comme modèle continu d'évolution relative constante. Lien avec les suites géométriques. Propriétés algébriques. Sens de variation selon a et le signe de k dans $x \mapsto ka^x$. Taux d'évolution moyen : exposant $\frac{1}{n}$.

Démonstrations : (1) Propriétés algébriques de a^x (admises). (2) Sens de variation de $x \mapsto ka^x$.

Capacités : Simplifier une expression avec des exponentielles. Étudier les variations de $x \mapsto ka^x$. Résoudre des équations et inéquations exponentielles. Calculer un taux d'évolution moyen. Utiliser la calculatrice ou Python pour résoudre des problèmes de seuil.

Tout le cours

Activités

Objectif : comprendre le passage des suites géométriques à la fonction exponentielle.

Un capital de 1 000 € est placé à un taux annuel de 5 %. On note u_n le capital après n années entières : $u_n = 1\,000 \times 1{,}05^n$.

1. Calculer u_0, u_1, u_2, u_5, u_{10}.
2. Peut-on calculer le capital après 6 mois ($n = 0{,}5$) ? Et après 3 ans et 4 mois ($n = 3{,}33$) ?
3. On définit $f(x) = 1\,000 \times 1{,}05^x$ pour tout réel $x \geq 0$. Calculer $f(0{,}5)$, $f(3{,}33)$ à la calculatrice.
4. Que représente la fonction f par rapport à la suite (u_n) ?

> **Bilan 1.** La suite géométrique $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ se prolonge en la **fonction exponentielle de base** a : $f(x) = a^x$, définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Objectif : retrouver les règles de calcul des puissances.

On prend $a = 2$.

1. Vérifier à la calculatrice que $2^3 \times 2^5 = 2^8$.
2. Calculer $2^{4{,}2} \times 2^{1{,}8}$. Comparer à 2^6.
3. Calculer $\dfrac{2^7}{2^3}$. Comparer à 2^4.
4. Calculer $(2^3)^4$. Comparer à 2^{12}.
5. Calculer 2^{-3}. Comparer à $\dfrac{1}{2^3}$.
6. Formuler les quatre règles observées.

Objectif : observer graphiquement le comportement de $x \mapsto a^x$.

À la calculatrice, tracer les courbes de $f(x) = 2^x$, $g(x) = 0{,}5^x$ et $h(x) = -3 \times 2^x$.

1. f est-elle croissante ou décroissante ? Quel est le signe de $f(x)$?
2. g est-elle croissante ou décroissante ? Que vaut $g(0)$?
3. h est-elle croissante ou décroissante ? Quel est le signe de $h(x)$?
4. Compléter : si $a > 1$ et $k > 0$, alors $x \mapsto ka^x$ est …
5. Compléter : si $0 < a < 1$ et $k > 0$, alors $x \mapsto ka^x$ est …

1 Définition et lien avec les suites géométriques

Soit $a > 0$. La **fonction exponentielle de base** a est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

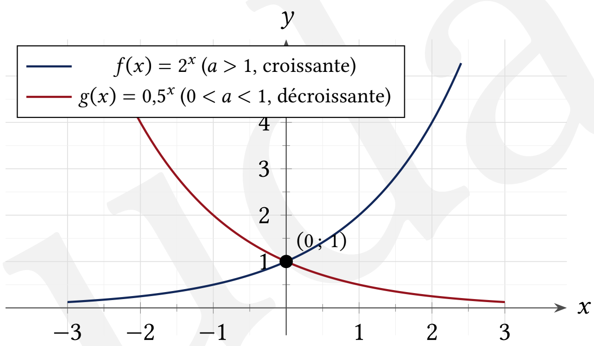
$$f(x) = a^x$$

Elle prolonge la suite géométrique (a^n) aux valeurs réelles.

Propriétés fondamentales :

- $a^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (la fonction est **strictement positive**).
- $a^0 = 1$ pour tout $a > 0$.
- $a^1 = a$.

Si (u_n) est géométrique de raison $q > 0$ et de premier terme u_0, alors $u_n = u_0 \times q^n$. En prolongeant : la fonction $f(x) = u_0 \times q^x$ modélise l'évolution de façon **continue**.



2 Propriétés algébriques

Pour $a > 0$ et tous réels x, y :

$$\boxed{a^x \times a^y = a^{x+y}} \qquad \boxed{\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}} \qquad \boxed{(a^x)^n = a^{nx}} \qquad \boxed{a^{-x} = \frac{1}{a^x}}$$

De plus : $a^0 = 1$ et $a^1 = a$.

$a^x \times a^y$ $\longrightarrow$ on **additionne** les exposants : $x + y$

a^x / a^y $\longrightarrow$ on **soustrait** les exposants : $x - y$

$(a^x)^n$ $\longrightarrow$ on **multiplie** les exposants : nx

a^{-x} $\longrightarrow$ on **inverse** : $\dfrac{1}{a^x}$

2.1 Méthode : simplifier une expression

Stratégie : ramener à la même base, puis appliquer les règles.

Exemples.

3 Équations et inéquations exponentielles

Propriété fondamentale. Pour $a > 0$, $a \neq 1$:

$$\boxed{a^x = a^y \iff x = y}$$

La fonction $x \mapsto a^x$ est **strictement monotone**, donc **injective**.

1. Ramener les deux membres à la **même base** a.
2. Identifier les exposants : $f(x) = g(x)$.
3. Résoudre l'équation obtenue.

Exemples.

Inéquations. Pour $a > 1$: $a^x \leq a^y \iff x \leq y$ (même sens).
Pour $0 < a < 1$: $a^x \leq a^y \iff x \geq y$ (sens contraire).

4 Sens de variation

Pour $f(x) = k a^x$ avec $a > 0$, $a \neq 1$, $k \neq 0$:

	$a > 1$	$0 < a < 1$
$k > 0$	**f strictement croissante**	**f strictement décroissante**
$k < 0$	**f strictement décroissante**	**f strictement croissante**

Exemples.

4.1 Déterminer k et a à partir de conditions

Exemple. Soit $g(x) = k a^x$ avec $g(0) = \frac{1}{2}$ et $g(2) = 8$.

5 Taux d'évolution moyen — Exposant $\frac{1}{n}$

Une grandeur subit n évolutions successives. Le **coefficient multiplicateur global** est C. Le **taux moyen** t_m est le taux unique qui, appliqué n fois, produit le même effet :

$$(1+t_m)^n = C$$

$$\boxed{1+t_m = C^{1/n} = \sqrt[n]{C}} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{t_m = C^{1/n} - 1}$$

Rappel : $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$.

Exemples.

Le taux moyen n'est **pas** la moyenne arithmétique des taux ! Il se calcule avec la racine n-ième du coefficient multiplicateur global.

6 Problèmes de modélisation

6.1 Population en croissance

Une ville de 200 000 habitants croît de 3,5 % par an. Le nombre d'habitants (en milliers) après x années est $f(x) = 200 \times 1{,}035^x$.

1. $f(5) = 200 \times 1{,}035^5 \approx 237{,}5$ milliers.

2. $f(10) \approx 282{,}1$ milliers.

3. $f(x) > 500 \iff 1{,}035^x > 2{,}5$. Par calculatrice : $x \geq 27$ ans.

6.2 Décroissance (médicament, radioactivité)

La concentration d'un médicament est $h(t) = 16 \times 0{,}8^t$ (mg/L), t en heures.

1. Concentration initiale : $h(0) = 16$ mg/L.

2. $0 < 0{,}8 < 1$ et $16 > 0$: h décroissante. La concentration diminue.

3. Divisée par 2 : $h(t) = 8 \iff 0{,}8^t = 0{,}5$. Par calc. : $t \approx 3{,}1$ h.

4. $h(t) < 0{,}1 \iff 0{,}8^t < 0{,}00625$. Par calc. : $t > 22{,}8$ h.

6.3 Python : recherche de seuil

```python
def seuil(u0, a, s):
    """Plus petit x entier tel que u0 * a^x >= s."""
    u = u0
    x = 0
    while u < s:
        u = u * a
        x = x + 1
    return x
```

Exemple : `seuil(200, 1.035, 500)` renvoie 27.

7 Bilan comparatif

	$a > 1$	$0 < a < 1$
Fonction	$f(x) = a^x$	$f(x) = a^x$
Monotonie ($k > 0$)	Strictement croissante	Strictement décroissante
Comportement	Croissance exponentielle	Décroissance exponentielle
Modèle	Croissance de population, intérêts composés	Radioactivité, médicament, dépréciation
Image de 0	$a^0 = 1$	$a^0 = 1$
Signe	$a^x > 0$ toujours	$a^x > 0$ toujours

Résumé des formules :

— $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ $\quad \dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ $\quad (a^x)^n = a^{nx}$ $\quad a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$

— $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$

— Taux moyen : $t_m = C^{1/n} - 1$

— Pour résoudre $a^{f(x)} = a^{g(x)}$: on identifie $f(x) = g(x)$

— Inéquations : même sens si $a > 1$, sens contraire si $0 < a < 1$

8 Exercice de synthèse

1. **1.** Simplifier : $A = \dfrac{5^3 \times 5^{-1,5}}{25^2}$ $\qquad B = (2^{-3})^2 \times 8^2$ $\qquad C = \dfrac{3^{2,5} \times 3^{-0,5}}{3^{-1}}$
2. **2.** Étudier les variations de : $f(x) = 1{,}5^x$ $\qquad g(x) = -4 \times 0{,}3^x$ $\qquad h(x) = 2 \times 7^x$
3. **3.** Un capital de 1 000 € est placé à 5 %/an.
   a) Exprimer u_n après n années. **b)** Valeur après 10 ans ? **c)** Taux mensuel équivalent ?
4. **4.** Évolutions +20 %, −5 %, +10 %.
   a) Taux global. **b)** Taux moyen par étape.
5. **5.** Tracer $f(x) = 2^x$ et $g(x) = 2^{-x}$. Que remarque-t-on ? Justifier.