Planche 1 — Suites arithmétiques et géométriques

Terminale Technologique • Chapitre 1 • 30 exercices — Fondamentaux

I Suites arithmétiques — Reconnaître et calculer

Exercice 1 — Reconnaître — 15 min [Correction]

Dire dans chacun des cas, si les quatre premiers nombres sont les premiers termes d'une suite arithmétique. Si c'est le cas, préciser la raison.

1. 8 ; 20 ; 32 ; 44.
2. -5 ; $-10{,}5$; -16 ; $-20{,}5$.
3. 15 ; 30 ; 45 ; 50.
4. $-2{,}5$; -5 ; $-7{,}5$; -10.

Exercice 2 — Calcul de termes — 15 min [Correction]

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $r = 3$.

1. Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4.
2. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.
3. Calculer u_{50} et u_{100}.
4. Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation $u_n = 302$.

Exercice 3 — Raison négative — 15 min [Correction]

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme $u_0 = -2$ et définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = u_n - \dfrac{1}{4}$.

1. Quelle est la nature de cette suite ? Préciser sa raison.
2. Calculer u_1, u_2 et u_3 en donnant le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.
3. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.
4. Calculer u_{26} et u_{100}.
5. Résoudre dans $\mathbb{N}$: $u_n = -13$.

Exercice 4 — Trois termes connus — 20 min [Correction]

Soit (u_n) une suite arithmétique dont on connaît les trois termes suivants : $u_1 = 2{,}5$, $u_3 = 7{,}5$ et $u_5 = 12{,}5$.

1. Calculer u_2 et u_4.
2. Déterminer la raison r de la suite (u_n).
3. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n puis calculer u_{150}.

Exercice 5 — Deux termes distants — 15 min [Correction]

Soit (v_n) une suite arithmétique dont on connaît les deux termes suivants : $v_{25} = 50$ et $v_{30} = 80$.

Déterminer sa raison r et son premier terme v_0.

Exercice 6 — Suite arithmétique et premier terme — 10 min [Correction]

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison $r = -4$ telle que $u_7 = 12$.

1. Déterminer u_0.
2. Exprimer u_n en fonction de n.
3. La suite est-elle croissante ou décroissante ? Justifier.

Exercice 7 — Vrai ou Faux — 10 min [Correction]

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant.

a) La suite 2 ; 5 ; 8 ; 11 ; ... est arithmétique de raison 3.

b) Si (u_n) est arithmétique de raison $r > 0$, alors (u_n) est croissante.

c) Si $u_5 = 10$ et $u_8 = 25$, alors la raison vaut 5.

d) La représentation graphique d'une suite arithmétique est une droite.

Exercice 8 — Moyenne arithmétique — 10 min [Correction]

1. Calculer la moyenne arithmétique de -6 et 14.
2. La moyenne arithmétique de a et 18 est 12. Trouver a.
3. Montrer que dans toute suite arithmétique, $u_n = \dfrac{u_{n-1} + u_{n+1}}{2}$.

Exercice 9 — Contexte — salaire — 15 min [Correction]

Un salarié gagne 1 800 € par mois la première année. Chaque année, son salaire augmente de 50 €. On note u_n son salaire mensuel la n-ième année ($u_1 = 1\,800$).

1. Justifier que (u_n) est arithmétique. Préciser u_1 et r.
2. Exprimer u_n en fonction de n.
3. Quel sera son salaire au bout de 20 ans ?
4. À partir de quelle année dépassera-t-il 2 500 € ?

Exercice 10 — Algorithme arithmétique — 15 min [Correction]

On considère l'algorithme suivant, écrit en langage Python :

```python
def f(n):
    u = 2.5
    s = u
    for k in range(1, n+1):
        u = u + 2.5
        s = s + u
    return s
```

a) Recopier et compléter le tableau :

k		1	2	3
u	2,5	…	…	…
s	2,5	…	…	…

b) Que retourne l'algorithme pour la valeur de $f(100)$?

II Suites géométriques — Reconnaître et calculer

Exercice 11 — Reconnaître — 15 min [Correction]

Dire dans chacun des cas, si les quatre premiers nombres sont les premiers termes d'une suite géométrique. Si c'est le cas, préciser la raison.

1. $31\ ;\ 62\ ;\ 124\ ;\ 248$.
2. $-4{,}5\ ;\ -9\ ;\ -18\ ;\ 36$.
3. $25\ ;\ 100\ ;\ 400\ ;\ 1\,600$.
4. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ ;\ 1\ ;\ \sqrt{2}\ ;\ 2$.

Exercice 12 — Calcul de termes — 15 min [Correction]

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme $u_0 = \dfrac{1}{10}$ et définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = 2u_n$.

1. Quelle est la nature de cette suite ? Préciser sa raison.
2. Calculer u_1, u_2 et u_3 en donnant le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.
3. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.
4. Calculer u_{10} et u_{20}.
5. Résoudre dans $\mathbb{N}$: $u_n = 1{,}6$.

Exercice 13 — Trois termes connus — 20 min [Correction]

Soit (u_n) une suite géométrique dont on connaît les trois termes suivants : $u_1 = 10$, $u_3 = 2{,}5$ et $u_5 = 0{,}625$.

1. Calculer u_2 et u_4.
2. Déterminer la raison q de la suite (u_n).
3. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n puis calculer u_9.

Exercice 14 — Deux termes distants — 15 min [Correction]

Soit (v_n) une suite géométrique dont on connaît les deux termes suivants : $v_{10} = 240$ et $v_8 = 60$.

Déterminer sa raison q en supposant qu'elle est **positive** et son premier terme v_0.

Exercice 15 — Suite géométrique décroissante — 10 min [Correction]

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme $u_0 = 1\,000$ et de raison $q = 0{,}8$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. La suite est-elle croissante ou décroissante ? Justifier.
3. Exprimer u_n en fonction de n.
4. À partir de quel rang $u_n < 100$?

Exercice 16 — Moyenne géométrique — 10 min [Correction]

1. Calculer la moyenne géométrique de 4 et 9.
2. La moyenne géométrique de a et 25 est 10. Trouver a.
3. Montrer que dans toute suite géométrique à termes positifs, $u_n = \sqrt{u_{n-1} \cdot u_{n+1}}$.

Exercice 17 — Contexte — bactéries — 20 min [Correction]

Lors de la culture dans le milieu naturel, une population composée initialement de 10 000 bactéries augmente de 5 000 bactéries toutes les heures. On note u_n le nombre de bactéries au bout de n heures.

1. Donner la nature de la suite (u_n) en précisant bien tous ses éléments caractéristiques.
2. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.
3. Déterminer le nombre de bactéries au bout de 5 heures.
4. Au bout de combien de temps la population dépassera le nombre de 50 000 bactéries ?

Exercice 18 — Contexte — placement — 15 min [Correction]

On place un capital de 5 000 € à un taux annuel de 3 %. On note v_n le capital acquis au bout de n années.

1. Justifier que (v_n) est une suite géométrique. Donner v_0 et q.
2. Exprimer v_n en fonction de n.
3. Calculer le capital au bout de 10 ans (arrondir au centime).
4. À partir de quelle année le capital dépasse-t-il 7 000 € ?

Exercice 19 — Algorithme géométrique — 15 min [Correction]

On considère l'algorithme suivant :

```
def f(n):
    u = 10
    s = u
    for k in range(1, n+1):
        u = u * 0.5
        s = s + u
    return s
```

a) Recopier et compléter le tableau :

k		1	2	3
u	10	…	…	…
s	10	…	…	…

b) Que retourne l'algorithme pour la valeur de $f(8)$?

Exercice 20 — Nature inconnue — 10 min [Correction]

On donne les trois premiers termes de suites. Pour chacune, dire si elle est arithmétique, géométrique ou ni l'une ni l'autre. Justifier.

a) $4\ ;\ 12\ ;\ 36$
b) $7\ ;\ 11\ ;\ 15$
c) $1\ ;\ 2\ ;\ 4$
d) $10\ ;\ 5\ ;\ 2$
e) $-6\ ;\ -3\ ;\ 0$
f) $100\ ;\ 10\ ;\ 1$

III Sommes et notation Sigma

Exercice 21 — Somme arithmétique — 15 min [**Correction**]

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme $u_0 = -2$ et de raison $r = -\frac{1}{4}$.

a) Déterminer $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{15} = \sum_{k=0}^{15} u_k$.

b) Déterminer $T = u_{16} + u_{17} + \cdots + u_{46} = \sum_{k=16}^{46} u_k$.

c) En déduire, sans utiliser la formule de somme d'une suite arithmétique, $U = \sum_{k=0}^{46} u_k$.

Exercice 22 — Somme géométrique — 15 min [**Correction**]

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme $u_0 = \frac{1}{10}$ et de raison $q = 2$.

a) Déterminer $S = \sum_{k=0}^{10} u_k$.

b) Déterminer $T = \sum_{k=10}^{20} u_k$.

c) En déduire $U = \sum_{k=0}^{20} u_k$.

Exercice 23 — Calculer des sommes — 35 min [**Correction**]

Calculer les sommes suivantes :

1. $\sum_{i=0}^{10} 3i$

2. $\sum_{i=3}^{20} 2 - \frac{1}{2}i$

3. $\sum_{k=1}^{n} k - 1$

4. $\sum_{i=1}^{5} i^2$

5. $\sum_{j=1}^{4} j^3$

6. $\sum_{k=0}^{15} \left(\frac{1}{2}\right)^k$

7. $\sum_{k=2}^{n} 5 \times (-4)^k$

Exercice 24 — Somme et contexte — 15 min [**Correction**]

Un athlète parcourt 3 000 m le premier jour, puis 150 m de plus chaque jour. On note u_n la distance parcourue le n-ième jour ($u_1 = 3\,000$).

a) Exprimer u_n en fonction de n.

b) Calculer la distance totale parcourue les 15 premiers jours.

c) Calculer la distance parcourue du jour 8 au jour 12.

Exercice 25 — Somme géométrique et seuil — 15 min [**Correction**]

On place 200 € sur un compte rémunéré à 5 % par an. On note $v_n = 200 \times 1{,}05^n$ le capital après n ans.

a) Calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$.

b) Calculer S_5 et S_{10}.

IV Exercices de synthèse

Exercice 26 — Déterminer la nature — 15 min [**Correction**]

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 4$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 0{,}4$.

a) Montrer que (u_n) est arithmétique et préciser ses éléments.

b) Exprimer u_n en fonction de n.

c) Calculer $\sum_{k=0}^{20} u_k$.

Exercice 27 — Déterminer la nature — 15 min [**Correction**]

On considère la suite (v_n) définie par $v_0 = 800$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 0{,}95\, v_n$.

a) Montrer que (v_n) est géométrique et préciser ses éléments.

b) Exprimer v_n en fonction de n.

c) La suite est-elle croissante ou décroissante ? Justifier.

d) À partir de quel rang $v_n < 400$?

Exercice 28 — Comparaison — 20 min [**Correction**]

Un magasin propose deux offres pour l'achat d'un téléphone à 800 € :

A. Réduction de 30 € chaque mois.

B. Réduction de 5 % du prix restant chaque mois.

On note a_n le prix avec l'offre A et b_n le prix avec l'offre B après n mois.

a) Identifier la nature de chaque suite.

b) Exprimer a_n et b_n en fonction de n.

c) Quelle offre est la plus avantageuse au bout de 6 mois ?

d) À partir de quel mois l'offre B devient-elle plus chère que l'offre A ?

Exercice 29 — QCM — 10 min [**Correction**]

Pour chaque question, une seule réponse est correcte.

1. (u_n) arith., $u_0 = 3$, $r = 2$. Alors $u_{10} =$ **a)** 20 **b)** 23 **c)** 25

2. (v_n) géom., $v_0 = 5$, $q = 3$. Alors $v_3 =$ **a)** 45 **b)** 135 **c)** 405

3. $\sum_{k=1}^{4} k =$ **a)** 4 **b)** 10 **c)** 24

4. Suite arith. $u_5 = 20$, $u_9 = 32$. La raison est : **a)** 3 **b)** 4 **c)** 6

Exercice 30 — Synthèse — 20 min [**Correction**]

On définit deux suites (u_n) et (v_n) pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 10 \\ u_{n+1} = u_n + 0{,}4 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = 8 \\ v_{n+1} = 1{,}028\, v_n \end{cases}$$

1. Identifier la nature de ces deux suites en précisant bien tous leurs éléments caractéristiques.
2. Déterminer l'expression de u_n et v_n en fonction de n.
3. On admet qu'à partir de $n \geq 46$, $u_n \leq v_n$. Interpréter ce résultat si u_n représente le nombre d'habitants (en millions) que l'agriculture peut nourrir et v_n le nombre d'habitants (en millions).

Corrections — Planche 1

Suites arithmétiques et géométriques — Fondamentaux

Correction 1 — Reconnaître [Énoncé]

1. $20-8=12$, $32-20=12$, $44-32=12$. Oui, arith. de raison $r=12$.
2. $-10{,}5-(-5)=-5{,}5$, $-16-(-10{,}5)=-5{,}5$, $-20{,}5-(-16)=-4{,}5\neq-5{,}5$. Non.
3. $30-15=15$, $45-30=15$, $50-45=5\neq15$. Non.
4. $-5-(-2{,}5)=-2{,}5$, $-7{,}5-(-5)=-2{,}5$, $-10-(-7{,}5)=-2{,}5$. Oui, arith. de raison $r=-2{,}5$.

Correction 2 — Calcul de termes [Énoncé]

1. $u_1=8$, $u_2=11$, $u_3=14$, $u_4=17$.
2. $u_n=5+3n$.
3. $u_{50}=5+150=155$. $u_{100}=5+300=305$.
4. $5+3n=302 \Rightarrow 3n=297 \Rightarrow n=99$. $S=\{99\}$.

Correction 3 — Raison négative [Énoncé]

1. Arith. de raison $r=-\frac{1}{4}$.
2. $u_1=-\frac{9}{4}$, $u_2=-\frac{10}{4}=-\frac{5}{2}$, $u_3=-\frac{11}{4}$.
3. $u_n=-2-\frac{n}{4}=\frac{-8-n}{4}$.
4. $u_{26}=\frac{-8-26}{4}=-\frac{34}{4}=-\frac{17}{2}$. $u_{100}=\frac{-108}{4}=-27$.
5. $\frac{-8-n}{4}=-13 \Rightarrow -8-n=-52 \Rightarrow n=44$.

Correction 4 — Trois termes connus [Énoncé]

1. $u_2=\frac{u_1+u_3}{2}=\frac{2{,}5+7{,}5}{2}=5$. $u_4=\frac{u_3+u_5}{2}=\frac{7{,}5+12{,}5}{2}=10$.
2. $r=u_2-u_1=5-2{,}5=2{,}5$.
3. Comme $r=2{,}5$ et $u_1=2{,}5$, $u_n=2{,}5+2{,}5(n-1)=2{,}5n$ pour $n\geq1$. $u_{150}=2{,}5\times150=375$.

Correction 5 — Deux termes distants [Énoncé]

$v_n=v_0+nr$. $\begin{cases} v_{25}=v_0+25r=50 \\ v_{30}=v_0+30r=80 \end{cases}$
$(2)-(1)$: $5r=30 \Rightarrow r=6$.
De (1) : $v_0=50-25\times6=-100$.
La suite a pour raison 6 et premier terme -100.

Correction 6 — Premier terme [Énoncé]

1. $u_7=u_0+7r \Rightarrow 12=u_0+7\times(-4) \Rightarrow u_0=40$.
2. $u_n=40-4n$.
3. $r=-4<0$ donc la suite est décroissante.

Correction 7 — Vrai ou Faux [Énoncé]

a) Vrai : $5-2=8-5=11-8=3$.
b) Vrai : $u_{n+1}-u_n=r>0$ donc croissante.
c) Vrai : $r=\frac{u_8-u_5}{8-5}=\frac{25-10}{3}=5$.
d) Faux : les points $(n;u_n)$ sont *alignés*, mais ce n'est pas une droite continue (c'est une suite discrète).

Correction 8 — Moyenne arithmétique [Énoncé]

1. $m_A=\frac{-6+14}{2}=4$.
2. $\frac{a+18}{2}=12 \Rightarrow a+18=24 \Rightarrow a=6$.
3. $\frac{u_{n-1}+u_{n+1}}{2}=\frac{(u_n-r)+(u_n+r)}{2}=\frac{2u_n}{2}=u_n$. CQFD.

Correction 9 — Salaire [Énoncé]

1. $u_{n+1}=u_n+50$: arith. $u_1=1\,800$, $r=50$.
2. $u_n=1\,800+50(n-1)=1\,750+50n$.
3. $u_{20}=1\,750+1\,000=2\,750$ €.
4. $1\,750+50n>2\,500 \Rightarrow 50n>750 \Rightarrow n>15$. À partir de la 16^{e} année.

Correction 10 — Algorithme arithmétique [Énoncé]

a) Tableau :

k		1	2	3
u	2,5	5	7,5	10
s	2,5	7,5	15	25

b) L'algorithme retourne $\sum_{k=1}^{100} u_k$. Or $u_k=2{,}5k$ donc $f(100)=100\times\frac{2{,}5+2{,}5\times100}{2}=100\times\frac{252{,}5}{2}=12\,625$.

Correction 11 — Reconnaître géom. [Énoncé]

1. $\frac{62}{31}=\frac{124}{62}=\frac{248}{124}=2$. Oui, géom. raison $q=2$.
2. $\frac{-9}{-4{,}5}=2$ et $\frac{36}{-18}=-2\neq2$. Non.
3. $\frac{100}{25}=\frac{400}{100}=\frac{1\,600}{400}=4$. Oui, géom. raison $q=4$.
4. $\frac{1}{1/\sqrt{2}}=\sqrt{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{1}=\sqrt{2}$, $\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$. Oui, géom. raison $q=\sqrt{2}$.

Correction 12 — Suite géom. $q=2$ [Énoncé]

1. Géom. de raison $q=2$.
2. $u_1=\frac{1}{5}$, $u_2=\frac{2}{5}$, $u_3=\frac{4}{5}$.
3. $u_n=\frac{1}{10}\times2^n$.
4. $u_{10}=\frac{2^{10}}{10}=102{,}4$. $u_{20}=\frac{2^{20}}{10}=104\,857{,}6$.
5. $\frac{2^n}{10}=1{,}6 \Rightarrow 2^n=16 \Rightarrow n=4$. $S=\{4\}$.

Correction 13 — Trois termes géom. [Énoncé]

1. $u_2=\sqrt{u_1\cdot u_3}=\sqrt{10\times2{,}5}=\sqrt{25}=5$. $u_4=\sqrt{u_3\cdot u_5}=\sqrt{2{,}5\times0{,}625}=\sqrt{1{,}5625}=1{,}25$.
2. $q=\frac{u_2}{u_1}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$.
3. $u_n=10\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ pour $n\geq1$. $u_9=10\times\left(\frac{1}{2}\right)^8=\frac{10}{256}=\frac{5}{128}$.

Correction 14 — Deux termes géom. [Énoncé]

$v_n = v_0 \cdot q^n$. $\begin{cases} v_{10} = v_0 \cdot q^{10} = 240 \\ v_8 = v_0 \cdot q^8 = 60 \end{cases}$

$\frac{(1)}{(2)}$: $q^2 = \frac{240}{60} = 4 \Rightarrow q = 2$ (car $q > 0$).
De (2) : $v_0 = \frac{60}{2^8} = \frac{60}{256} = \frac{15}{64}$.

Correction 15 — Géom. décroissante [Énoncé]

1. $u_1 = 800$, $u_2 = 640$, $u_3 = 512$.
2. $u_0 > 0$ et $0 < q < 1$: décroissante.
3. $u_n = 1\,000 \times 0{,}8^n$.
4. $1\,000 \times 0{,}8^n < 100 \Leftrightarrow 0{,}8^n < 0{,}1$. Par calcul : $n \geq 11$ (car $0{,}8^{10} \approx 0{,}107$ et $0{,}8^{11} \approx 0{,}086$).

Correction 16 — Moyenne géométrique [Énoncé]

1. $m_G = \sqrt{4 \times 9} = \sqrt{36} = 6$.
2. $\sqrt{25a} = 10 \Rightarrow 25a = 100 \Rightarrow a = 4$.
3. $\sqrt{u_{n-1} \cdot u_{n+1}} = \sqrt{(u_0 q^{n-1})(u_0 q^{n+1})} = \sqrt{u_0^2 \cdot q^{2n}} = u_0 \cdot q^n = u_n$. CQFD.

Correction 17 — Bactéries [Énoncé]

1. $u_{n+1} = u_n + 5\,000$: arith., $u_0 = 10\,000$, $r = 5\,000$.
2. $u_n = 10\,000 + 5\,000n$.
3. $u_5 = 10\,000 + 25\,000 = 35\,000$ bactéries.
4. $10\,000 + 5\,000n \geq 50\,000 \Rightarrow 5\,000n \geq 40\,000 \Rightarrow n \geq 8$. Au bout de 8 h.

Correction 18 — Placement [Énoncé]

1. $v_{n+1} = 1{,}03\, v_n$: géom., $v_0 = 5\,000$, $q = 1{,}03$.
2. $v_n = 5\,000 \times 1{,}03^n$.
3. $v_{10} = 5\,000 \times 1{,}03^{10} \approx 6\,719{,}58$ €.
4. $5\,000 \times 1{,}03^n > 7\,000 \Rightarrow 1{,}03^n > 1{,}4$. Par calcul : $n \geq 12$ (car $1{,}03^{11} \approx 1{,}384$ et $1{,}03^{12} \approx 1{,}426$).

Correction 19 — Algorithme géom. [Énoncé]

a)

k		1	2	3
u	10	5	2,5	1,25
s	10	15	17,5	18,75

b) $f(8) = \sum_{k=0}^{8} 10 \times 0{,}5^k = 10 \times \frac{1 - 0{,}5^9}{1 - 0{,}5} \approx 19{,}92$.

Correction 20 — Nature inconnue [Énoncé]

a) $\frac{12}{4} = 3$, $\frac{36}{12} = 3$: géom. $q = 3$.
b) $11 - 7 = 4$, $15 - 11 = 4$: arith. $r = 4$.
c) $2 - 1 = 1$, $4 - 2 = 2$: pas arith. $\frac{2}{1} = 2$, $\frac{4}{2} = 2$: géom. $q = 2$.
d) $5 - 10 = -5$, $2 - 5 = -3$: pas arith. $\frac{5}{10} = 0{,}5$, $\frac{2}{5} = 0{,}4$: ni l'une ni l'autre.
e) $-3 - (-6) = 3$, $0 - (-3) = 3$: arith. $r = 3$.
f) $\frac{10}{100} = 0{,}1$, $\frac{1}{10} = 0{,}1$: géom. $q = 0{,}1$.

Correction 21 — Somme arithmétique [Énoncé]

a) $u_{15} = -2 - \frac{15}{4} = -\frac{23}{4}$. $S = 16 \times \frac{-2 + (-\frac{23}{4})}{2} = 16 \times \frac{-\frac{31}{4}}{2} = 8 \times \frac{-31}{4} = -62$.
b) $u_{16} = -2 - 4 = -6$, $u_{46} = -2 - \frac{46}{4} = -\frac{54}{4} = -13{,}5$. $T = 31 \times \frac{-6 + (-13{,}5)}{2} = 31 \times (-9{,}75) = -302{,}25$.
c) $U = S + T = -62 - 302{,}25 = -364{,}25$.

Correction 22 — Somme géométrique [Énoncé]

a) $S = \frac{1}{10} \times \frac{1 - 2^{11}}{1 - 2} = \frac{1}{10} \times \frac{-2047}{-1} = 204{,}7$.
b) $u_{10} = \frac{2^{10}}{10} = 102{,}4$. $T = 102{,}4 \times \frac{1 - 2^{11}}{1 - 2} = 102{,}4 \times 2047 = 209\,612{,}8$.
c) $U = S + T = 204{,}7 + 209\,612{,}8 = 209\,817{,}5$.

Correction 23 — Sommes [Énoncé]

1. $3 \sum_{i=0}^{10} i = 3 \times \frac{10 \times 11}{2} = 165$.
2. Arith. de raison $-\frac{1}{2}$, 1^{er} terme 0,5. $18 \times \frac{0{,}5 + (-7{,}5)}{2} = 9 \times (-7{,}5) = -67{,}5$.
3. $\sum_{k=1}^{n} (k - 1) = \sum_{j=0}^{n-1} j = \frac{n(n-1)}{2}$.
4. $1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55$.
5. $1 + 8 + 27 + 64 = 100$.
6. $\frac{1 - (1/2)^{16}}{1 - 1/2} = 2\left(1 - \frac{1}{2^{16}}\right) \approx 2$.
7. Géom. de raison -4, 1^{er} terme 80. $80 \times \frac{1 - (-4)^{n-1}}{1 - (-4)} = 16\left(1 - (-4)^{n-1}\right)$.

Correction 24 — Somme contexte [Énoncé]

a) $u_n = 3\,000 + 150(n - 1) = 2\,850 + 150n$.
b) $S_{15} = 15 \times \frac{u_1 + u_{15}}{2} = 15 \times \frac{3\,000 + 5\,100}{2} = 60\,750$ m.
c) $S_{8 \to 12} = 5 \times \frac{u_8 + u_{12}}{2} = 5 \times \frac{4\,050 + 4\,650}{2} = 21\,750$ m.

Correction 25 — Somme géom. et seuil [Énoncé]

a) $S_n = 200 \times \frac{1 - 1{,}05^{n+1}}{1 - 1{,}05} = 4\,000(1{,}05^{n+1} - 1)$.
b) $S_5 = 4\,000(1{,}05^6 - 1) \approx 1\,340{,}10$. $S_{10} = 4\,000(1{,}05^{11} - 1) \approx 2\,835{,}68$.

Correction 26 — Nature arith. [Énoncé]

a) $u_{n+1} - u_n = 0{,}4$ = cste : arith. $u_0 = 4$, $r = 0{,}4$.
b) $u_n = 4 + 0{,}4n$.
c) $\sum_{k=0}^{20} u_k = 21 \times \frac{4 + 12}{2} = 21 \times 8 = 168$.

Correction 27 — Nature géom. [Énoncé]

a) $\frac{v_{n+1}}{v_n} = 0{,}95$ = cste : géom. $v_0 = 800$, $q = 0{,}95$.
b) $v_n = 800 \times 0{,}95^n$.
c) $v_0 > 0$ et $0 < q < 1$: décroissante.
d) $800 \times 0{,}95^n < 400 \Leftrightarrow 0{,}95^n < 0{,}5$. Par calcul : $n \geq 14$.

Correction 28 — Comparaison [Énoncé]

a) a_n arith. ($r = -30$), b_n géom. ($q = 0{,}95$).
b) $a_n = 800 - 30n$, $b_n = 800 \times 0{,}95^n$.
c) $a_6 = 620$, $b_6 = 800 \times 0{,}95^6 \approx 590{,}49$. Offre B meilleure.
d) Par calcul, à partir de $n = 11$: $a_{11} = 470$, $b_{11} \approx 456{,}3$; $a_{12} = 440$, $b_{12} \approx 433{,}5$. L'offre B reste moins chère.

Correction 29 — QCM [Énoncé]

1. $u_{10} = 3 + 2 \times 10 = 23$: réponse **b)**.
2. $v_3 = 5 \times 3^3 = 135$: réponse **b)**.

3. $1+2+3+4=10$: réponse **b)**.
4. $r=\frac{32-20}{9-5}=\frac{12}{4}=3$: réponse **a)**.

Correction 30 — Synthèse [Énoncé]

1. (u_n) : arith., $u_0=10$, $r=0{,}4$. (v_n) : géom., $v_0=8$, $q=1{,}028$.
2. $u_n=10+0{,}4n$. $v_n=8\times 1{,}028^n$.
3. Pour $n\geq 46$, la population (v_n) dépasse la capacité de l'agriculture (u_n). Le nombre d'habitants dépasse ce que l'agriculture peut nourrir à partir de cette date.