Chapitre 1 — Suites arithmétiques et géométriques

Terminale Technologique • Tronc commun

Table des matières

PROGRAMME (BO — TERMINALE TECHNOLOGIQUE)

Contenus : Suites arithmétiques : moyenne arithmétique, terme de rang n, somme des n premiers termes, notation Σ. Suites géométriques à termes positifs : moyenne géométrique, terme de rang n, somme des n premiers termes.

Démonstrations : Expression du terme général d'une suite arithmétique. Expression du terme général d'une suite géométrique. Formule de la somme des termes consécutifs.

Capacités : Identifier la nature d'une suite (arithmétique ou géométrique). Exprimer u_n en fonction de n. Calculer des sommes de termes consécutifs. Lien avec croissance linéaire (arithmétique) et exponentielle (géométrique). Programmer en Python : somme des premiers carrés, cubes, inverses.

Tout le cours

Activités

Objectif : reconnaître une suite arithmétique dans un contexte concret.

Un athlète s'entraîne pour un marathon. Le premier jour, il parcourt 3 000 m. Chaque jour, il parcourt 150 m de plus que la veille. On note u_n la distance parcourue le n-ième jour ($u_1 = 3\,000$).

1. Calculer u_2, u_3 et u_4.
2. Calculer $u_2 - u_1$, $u_3 - u_2$, $u_4 - u_3$. Que constate-t-on ?
3. Compléter : $u_{n+1} = u_n + \dots$
4. Exprimer u_n en fonction de n.
5. Quelle distance parcourt-il le 30$^{\text{e}}$ jour ?

Correction. 1. $u_2 = 3\,150$, $u_3 = 3\,300$, $u_4 = 3\,450$. 2. Les différences sont constantes, égales à 150. 3. $u_{n+1} = u_n + 150$. 4. $u_n = 3\,000 + 150(n-1) = 2\,850 + 150n$. 5. $u_{30} = 2\,850 + 4\,500 = 7\,350$ m.

Bilan 1. Une suite (u_n) est **arithmétique** de raison r si, pour tout n :

$$u_{n+1} = u_n + r$$

La raison r est la différence constante entre deux termes consécutifs.

Objectif : reconnaître une suite géométrique dans un contexte concret.

On place un capital de 500 € à un taux annuel de 4 %. Les intérêts sont composés (calculés sur le capital de l'année précédente). On note v_n le capital acquis après n années ($v_0 = 500$).

1. Calculer v_1, v_2 et v_3 (arrondir au centime).
2. Calculer $\frac{v_1}{v_0}$, $\frac{v_2}{v_1}$, $\frac{v_3}{v_2}$. Que constate-t-on ?
3. Compléter : $v_{n+1} = \dots \times v_n$
4. Le capital double-t-il au bout de 15 ans ?

Correction. 1. $v_1 = 520$, $v_2 = 540{,}80$, $v_3 = 562{,}43$. 2. Les rapports sont constants, égaux à 1,04. 3. $v_{n+1} = 1{,}04 \times v_n$. 4. $v_{15} = 500 \times 1{,}04^{15} \approx 900{,}47$: non, il ne double pas.

Bilan 2. Une suite (u_n) est **géométrique** de raison q ($q \neq 0$) si, pour tout n :

$$u_{n+1} = q \times u_n$$

La raison q est le rapport constant entre deux termes consécutifs.

Objectif : distinguer suites arithmétiques, géométriques et autres.

Pour chaque suite, calculer les différences $u_{n+1} - u_n$ ET les rapports $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$, puis conclure.

1. 2 ; 5 ; 8 ; 11 ; 14

2. 3 ; 6 ; 12 ; 24 ; 48

3. 100 ; 10 ; 1 ; 0,1 ; 0,01

4. 1 ; 4 ; 9 ; 16 ; 25

Correction. 1. Arith. $r = 3$. 2. Géom. $q = 2$. 3. Géom. $q = 0{,}1$. 4. Ni arith. ni géom. (ce sont les carrés parfaits).

1 Définitions et relation de récurrence

Une suite (u_n) est **arithmétique** de raison r si, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = u_n + r$$

- Si $r > 0$: la suite est **croissante**.
- Si $r = 0$: la suite est **constante**.
- Si $r < 0$: la suite est **décroissante**.

Exemples : $u_0 = 3, r = 5 : 3,\ 8,\ 13,\ 18,\ \dots$ $v_0 = 5, r = -2 : 5,\ 3,\ 1,\ -1,\ \dots$

Test : (u_n) est arithmétique $\Leftrightarrow u_{n+1} - u_n = r$ (constante).

Une suite (u_n) est **géométrique** de raison q ($q \neq 0$) si, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = q \times u_n$$

Pour une suite à termes **positifs** :

- Si $q > 1$: la suite est **croissante**.
- Si $q = 1$: la suite est **constante**.
- Si $0 < q < 1$: la suite est **décroissante**.

Exemples : $u_0 = 5, q = 2 : 5,\ 10,\ 20,\ 40,\ \dots$ $v_0 = 4, q = 0{,}1 : 4\ ;\ 0{,}4\ ;\ 0{,}04\ ;\ \dots$

Test : (u_n) est géométrique $\Leftrightarrow \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = q$ (constante, $u_n \neq 0$).

2 Terme de rang n (forme explicite)

Si (u_n) est arithmétique de premier terme u_0 et de raison r, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = u_0 + nr$$

Plus généralement, si on connaît u_p : $u_n = u_p + (n - p)r$.

Démonstration : $u_1 = u_0 + r$, $u_2 = u_0 + 2r$, ..., $u_n = u_0 + nr$. **CQFD**

Exemple : $u_0 = 7$, $r = -4$. Alors $u_n = 7 - 4n$.

Correction. $u_{10} = 7 - 40 = -33$. $u_n = 0 \Leftrightarrow n = \frac{7}{4} = 1{,}75$: pas d'entier solution.

Si (u_n) est géométrique de premier terme u_0 et de raison q, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = u_0 \times q^n$$

Plus généralement, si on connaît u_p : $u_n = u_p \times q^{n-p}$.

Démonstration : $u_1 = q \cdot u_0$, $u_2 = q^2 \cdot u_0$, ..., $u_n = u_0 \cdot q^n$. **CQFD**

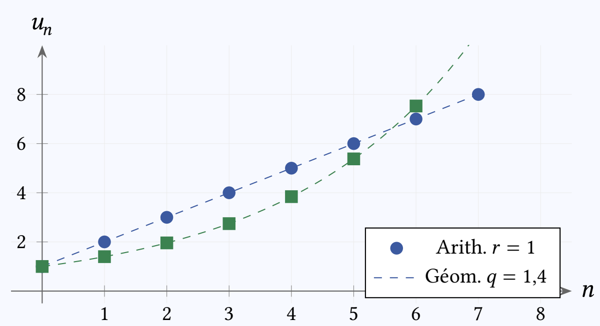
Exemple : $u_0 = 3$, $q = 4$. Alors $u_n = 3 \times 4^n$.

Correction. $u_5 = 3 \times 4^5 = 3 \times 1\,024 = 3\,072$.

1. **Identifier** la nature (arith. ou géom.) : calculer différences ou rapports.
2. **Lire** u_0 (ou le calculer par « marche arrière »).
3. **Lire** r (ou q).
4. **Appliquer** la formule : $u_n = u_0 + nr$ ou $u_n = u_0 \times q^n$.

3 Sens de variation

	Suite arithmétique	**Suite géométrique ($u_0 > 0$)**
Croissante	$r > 0$	$q > 1$
Constante	$r = 0$	$q = 1$
Décroissante	$r < 0$	$0 < q < 1$
Graphique	Points **alignés**	Courbe **exponentielle**
Croissance	**Linéaire**	**Exponentielle**



Correction. La suite géom. croît de plus en plus vite (exponentielle) tandis que la suite arith. croît régulièrement (linéaire). La suite géom. finit toujours par dépasser la suite arith.

4 Somme des termes consécutifs

4.1 Notation Σ

Notation. La somme des termes de u_p à u_n s'écrit :

$$u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = \sum_{k=p}^{n} u_k$$

Le nombre de termes de cette somme est $n - p + 1$.

4.2 Formule de la somme — Suite arithmétique

$$\sum_{k=p}^{n} u_k = (n - p + 1) \times \frac{u_p + u_n}{2}$$

nombre de termes × demi-somme des extrêmes

Exemple : Athlète, $u_1 = 3\,000$, $r = 150$. Distance totale sur 16 jours :

$$\sum_{k=1}^{16} u_k = 16 \times \frac{u_1 + u_{16}}{2} = 16 \times \frac{3\,000 + 5\,250}{2} = 66\,000\,\text{m}$$

Correction. Vérification : $u_{16} = 3\,000 + 15 \times 150 = 5\,250$.

4.3 Formule de la somme — Suite géométrique

Pour $q \neq 1$:

$$\sum_{k=p}^{n} u_k = u_p \times \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}$$

Exemple : Placement de 500 € à 4 % :

$$\sum_{k=0}^{10} v_k = 500 \times \frac{1 - 1{,}04^{11}}{1 - 1{,}04} \approx 6\,932{,}09\,€$$

5 Moyennes arithmétique et géométrique

Moyenne arithmétique de a et b :

$$m_A = \frac{a+b}{2}$$

Moyenne géométrique de $a > 0$ et $b > 0$:

$$m_G = \sqrt{ab}$$

Propriétés clés :

— Dans une suite **arithmétique** : $u_n = \dfrac{u_{n-1} + u_{n+1}}{2}$ (chaque terme est la moyenne arithmétique de ses voisins).

— Dans une suite **géométrique** : $u_n = \sqrt{u_{n-1} \cdot u_{n+1}}$ (chaque terme est la moyenne géométrique de ses voisins).

Exemples : $m_A(-3; 19) = \frac{-3+19}{2} = 8$. $m_G(4; 9) = \sqrt{4 \times 9} = \sqrt{36} = 6$.

6 Comparaison arith./géom. et applications

Contexte : Capital de 200 €.

— **A :** +6 % du capital *initial* chaque année ⇒ arith., $r = 12$.

— **B :** +4 % du capital *de l'année* ⇒ géom., $q = 1{,}04$.

$u_n = 200 + 12n$ $v_n = 200 \times 1{,}04^n$

Résultat fondamental : À long terme, la croissance **exponentielle** (géom.) dépasse toujours la croissance **linéaire** (arith.).
Ici, à partir de $n = 21$ ans, le placement B dépasse le placement A.

Correction. $u_{21} = 200 + 252 = 452$. $v_{21} = 200 \times 1{,}04^{21} \approx 456$. La suite géom. dépasse.

7 Algorithmes Python et notation Sigma

Somme des n premiers carrés :

$$\sum_{k=1}^{n} k^2$$

```python
def somme_carres(n):
    S = 0
    for k in range(1, n+1):
        S = S + k**2
    return S
```

Somme des n premiers cubes :

$$\sum_{k=1}^{n} k^3$$

```python
def somme_cubes(n):
    S = 0
    for k in range(1, n+1):
        S = S + k**3
    return S
```

Somme des n premiers inverses :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

```python
def somme_inverses(n):
    S = 0
    for k in range(1, n+1):
        S = S + 1/k
    return S
```

Composantes de l'algorithme :

1. **Initialisation :** $S \leftarrow 0$
2. **Compteur :** boucle sur k
3. **Accumulateur :** $S \leftarrow S + \text{terme}$
4. **Sortie :** `return S`

Pour trouver le plus petit n tel que u_n dépasse une valeur M :

```python
def seuil(u0, q, M):
    n = 0
    u = u0
    while u <= M:
        u = q * u     # ou u = u + r pour arith.
        n = n + 1
    return n
```

Correction. Exemple : `seuil(500, 1.04, 1000)` retourne $n = 18$ (il faut 18 ans pour doubler à 4 %).

Bilan comparatif

	Suite arithmétique	Suite géométrique
Récurrence	$u_{n+1} = u_n + r$	$u_{n+1} = q \cdot u_n$
Test	$u_{n+1} - u_n = r\,(\text{cste})$	$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = q\,(\text{cste})$
Terme général	$u_n = u_0 + nr$	$u_n = u_0 \cdot q^n$
Somme	$(n-p+1) \cdot \dfrac{u_p + u_n}{2}$	$u_p \cdot \dfrac{1 - q^{n-p+1}}{1-q}$
Variation ($u_0 > 0$)	$r > 0$ croiss., $r < 0$ décrois.	$q > 1$ croiss., $0 < q < 1$ décrois.
Croissance	**linéaire**	**exponentielle**
Graphique	Points alignés	Courbe exponentielle
Moyenne	$u_n = \dfrac{u_{n-1} + u_{n+1}}{2}$	$u_n = \sqrt{u_{n-1} \cdot u_{n+1}}$

Exercice de synthèse

1. Reconnaître la nature et donner r ou q : $2,\ 5,\ 8,\ 11,\ \dots$ $\quad 3,\ 6,\ 12,\ 24,\ \dots$ $\quad 100,\ 10,\ 1,\ 0{,}1,\ \dots$

2. Suite arith. $u_0 = 10$, $r = -3$: **a)** Exprimer u_n. **b)** Calculer u_{20}. **c)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{20} u_k$.

3. Suite géom. $u_0 = 2\,000$, $q = 0{,}9$: **a)** Exprimer u_n. **b)** Croissante ou décroissante ? **c)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{9} u_k$.

4. Montrer que 4, 6, 9 sont termes consécutifs d'une suite géométrique et donner sa raison.

5. En Python, écrire une fonction `somme_geo(u0, q, n)` qui calcule $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_0 \cdot q^k$.

Correction. **1.** Arith. $r = 3$. Géom. $q = 2$. Géom. $q = 0{,}1$. **2.a)** $u_n = 10 - 3n$. **b)** $u_{20} = -50$. **c)** $21 \times \frac{10+(-50)}{2} = 21 \times (-20) = -420$. **3.a)** $u_n = 2\,000 \times 0{,}9^n$. **b)** $0 < q < 1$: décroissante. **c)** $2\,000 \times \frac{1-0{,}9^{10}}{1-0{,}9} \approx 13\,024{,}51$. **4.** $\frac{6}{4} = \frac{9}{6} = 1{,}5$: géom. $q = 1{,}5$. **5.**

```
def somme_geo(u0,q,n): S=0; u=u0
  for k in range(n+1): S+=u; u*=q
  return S
```