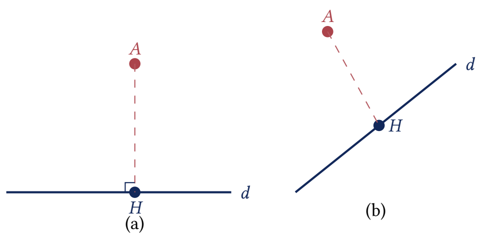
Planche 2 — Repérage et distance dans le plan

Seconde • Ch.9 • 50 exercices : projeté orthogonal, médiatrice, figures, ouverture Al-Kashi

I Projeté orthogonal

Exercice 1 — Identifier le projeté **[Correction]**

Pour chaque figure, identifier le projeté orthogonal H de A sur la droite d :

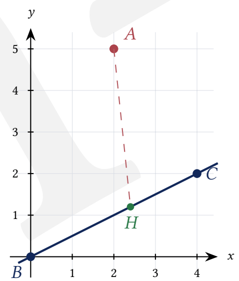


Pour chaque figure : écrire les deux conditions que vérifie H.

Exercice 2 — Calculer un projeté — méthode **[Correction]**

$A(2;5)$, $B(0;0)$, $C(4;2)$. Trouver le projeté orthogonal H de A sur (BC).

Méthode : $\overrightarrow{BH} = t\,\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$.



Exercice 3 — Projeté sur l'axe des x **[Correction]**

$A(3;4)$. Trouver le projeté orthogonal H de A sur l'axe des x (droite $y = 0$).

a) Sans calcul, donner les coordonnées de H.
b) Calculer AH.
c) Vérifier que $AH \leq AM$ pour $M(5;0)$.

Exercice 4 — Projeté et distance **[Correction]**

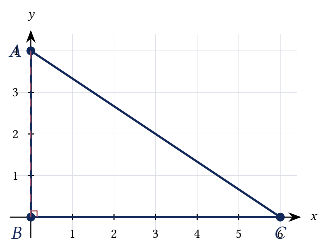
$A(1;3)$, $B(-2;0)$, $C(2;4)$.

a) Trouver H projeté orthogonal de A sur (BC).
b) Calculer la distance de A à (BC).
c) Vérifier que $AH < AM$ pour $M = B$.

Exercice 5 — Hauteur d'un triangle **[Correction]**

$A(0;4)$, $B(0;0)$, $C(6;0)$.

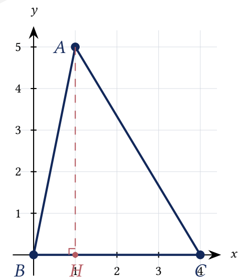
a) Tracer le triangle dans un repère.
b) Trouver le pied H de la hauteur issue de A sur (BC).
c) Calculer AH (hauteur du triangle).
d) En déduire l'aire du triangle ABC.



Exercice 6 — Triangle quelconque — hauteur **[Correction]**

$A(1;5)$, $B(0;0)$, $C(4;0)$.

a) Trouver H pied de la hauteur de A sur (BC).
b) Calculer AH et BC.
c) Calculer l'aire du triangle.



Exercice 7 — Projeté en Python **[Correction]**

```python
import math

def projete(A, B, C):
    """
    Projete orthogonal de A sur la droite (BC).
    H = B + t*BC, avec t = BA.BC / |BC|^2
    """
    BC = (C[0]-B[0], C[1]-B[1])
    BA = (A[0]-B[0], A[1]-B[1])
    norme2 = BC[0]**2 + BC[1]**2
    t = (BA[0]*BC[0] + BA[1]*BC[1]) / norme2
    H = (B[0]+t*BC[0], B[1]+t*BC[1])
    return H, t

def dist_pt_droite(A, B, C):
    H, _ = projete(A, B, C)
    return math.sqrt((A[0]-H[0])**2 + (A[1]-H[1])**2)

# Tests
```

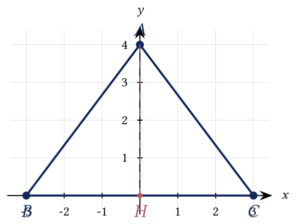
```
A, B, C = (1,3), (0,0), (4,2)
H, t = projete(A, B, C)
print(f"H = ({H[0]:.3f}, {H[1]:.3f})")
print(f"t = {t:.3f}")
print(f"Dist A a (BC) = {dist_pt_droite(A,B,C):.3f}"
    )
```

a) Exécuter mentalement et vérifier H.
b) Tester pour $A(2;5)$, $B(0;0)$, $C(4;2)$.
c) Si $t > 1$ ou $t < 0$, que signifie-t-il géométriquement ?

Exercice 8 — Projeté — triangle isocèle [**Correction**]

$A(0;4)$, $B(-3;0)$, $C(3;0)$.

a) Montrer que le triangle est isocèle en A.
b) Trouver H pied de la hauteur issue de A sur (BC).
c) Sans calcul, quel est H ici ? Justifier par la symétrie.



Exercice 9 — Projeté et paramètre [**Correction**]

$A(k;3)$, $B(0;0)$, $C(3;0)$. Trouver la valeur de k telle que le projeté de A sur (BC) soit le milieu de $[BC]$.

Exercice 10 — Distance d'un point à un axe [**Correction**]

a) Quelle est la distance du point $M(x;y)$ à l'axe des x ?
b) Quelle est la distance de $M(x;y)$ à l'axe des y ?
c) Trouver les points équidistants des deux axes.

II Médiatrice et applications

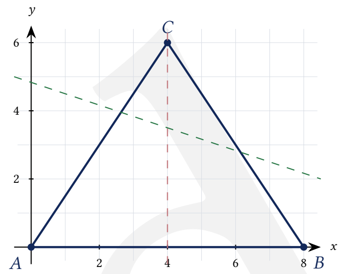
Exercice 11 — Médiatrice — calcul [**Correction**]

Trouver l'équation de la médiatrice de $[AB]$:

a) $A(0;0)$, $B(0;6)$
b) $A(-2;3)$, $B(4;1)$
c) $A(1;1)$, $B(5;3)$

Exercice 12 — Médiatrice et triangle [**Correction**]

$A(0;0)$, $B(8;0)$, $C(4;6)$.



a) Trouver la médiatrice de $[AB]$.
b) Trouver la médiatrice de $[BC]$.
c) Les deux médiatrices se coupent en O' (centre du cercle circonscrit). Trouver O'.
d) Calculer le rayon du cercle circonscrit.

Exercice 13 — Caractérisation par équidistance [**Correction**]

Montrer que l'ensemble des points $M(x;y)$ équidistants de $A(1;0)$ et $B(-1;0)$ est l'axe des y.

Exercice 14 — Médiatrice et droite perpendiculaire [**Correction**]

$A(2;1)$ et $B(6;5)$.

a) Calculer le milieu I de $[AB]$.
b) Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est-il perpendiculaire à la médiatrice ?
c) Donner l'équation de la médiatrice.

Exercice 15 — Point équidistant de trois points [**Correction**]

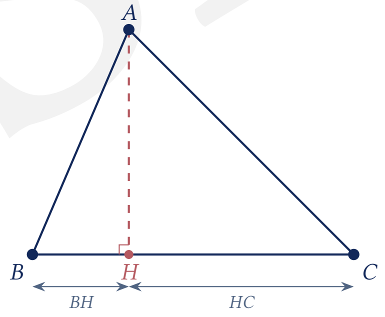
$A(0;0)$, $B(6;0)$, $C(3;4)$.

a) La médiatrice de $[AB]$ est $x = 3$.
b) Écrire $O'A = O'C$ pour trouver $y_{O'}$ (avec $x_{O'} = 3$).
c) Calculer le rayon $O'A$.

III Figures TikZ — exercices avec schémas

Exercice 16 — Triangle et hauteur [**Correction**]

Dans la figure ci-dessous, H est le pied de la hauteur issue de A.

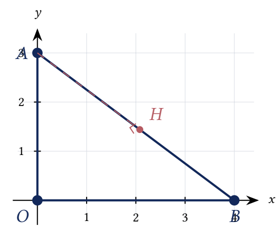


$A(1{,}5\ ;\ 3{,}5)$, $B(0\ ;\ 0)$, $C(5\ ;\ 0)$.

a) Calculer BH et HC.
b) Calculer AH.
c) Vérifier : $AB^2 = BH^2 + AH^2$ et $AC^2 = HC^2 + AH^2$.

Exercice 17 — Projeté et triangle rectangle [**Correction**]

Dans un repère orthonormé, $A(0;3)$, $B(4;0)$.



a) Calculer OA, OB, AB.

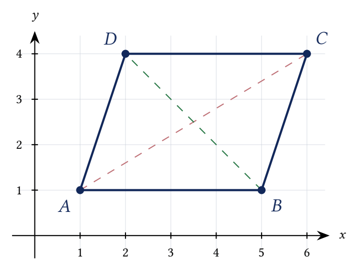
b) Le triangle OAB est-il rectangle ? En quel sommet ?
c) H est le projeté de O sur (AB). Calculer H.
d) Vérifier $OH^2 = OA^2 \cdot OB^2 / AB^2$ (relation dans le triangle rectangle).

Exercice 18 — Cercle et projeté [Correction]

$C(2;3)$ centre d'un cercle de rayon $r = 4$. $A(5;7)$.

a) A est-il dans le cercle, sur le cercle ou à l'extérieur ?
b) La droite (CA) coupe le cercle en deux points P et Q (de part et d'autre de C). Trouver leurs coordonnées.

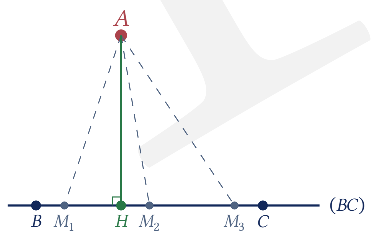
Exercice 19 — Quadrilatère et diagonales [Correction]



$A(1;1)$, $B(5;1)$, $C(6;4)$, $D(2;4)$.

a) Calculer les milieux de $[AC]$ et $[BD]$.
b) Conclure sur la nature du quadrilatère.
c) Calculer le périmètre et les longueurs des diagonales.

Exercice 20 — Plus court chemin [Correction]



$A(1{,}5;3)$, $B(0;0)$, $C(4;0)$.

a) Calculer AM_1, AM_2, AM_3 pour $M_1(0{,}5;0)$, $M_2(2;0)$, $M_3(3{,}5;0)$.
b) Trouver H projeté orthogonal de A sur (BC).
c) Calculer AH.
d) Vérifier que AH est bien le minimum.

IV Ouverture — Al-Kashi et trigonométrie

Exercice 21 — Al-Kashi — vérification [Correction]

Dans un triangle ABC avec $A(0;0)$, $B(4;0)$, $C(1;3)$.

a) Calculer $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$.
b) Appliquer la formule d'Al-Kashi : $\cos\hat{A} = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$.
c) Vérifier avec la définition du cosinus si possible.

Exercice 22 — Al-Kashi — trouver un côté [Correction]

Dans un triangle, $b = 5$, $c = 7$, $\hat{A} = 60°$.

a) Appliquer Al-Kashi : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$.
b) Calculer a.

Exercice 23 — Cas particulier — Pythagore [Correction]

a) Dans Al-Kashi, si $\hat{B} = 90°$, que vaut $\cos\hat{B}$?
b) En déduire que $b^2 = a^2 + c^2$ (Pythagore).
c) Interpréter : Al-Kashi est une généralisation de Pythagore.

Exercice 24 — Distance et cosinus [Correction]

$A(3;0)$, $B(0;0)$, $C(0;4)$.

a) Calculer les trois longueurs.
b) Calculer $\cos\hat{B}$ par la formule d'Al-Kashi.
c) Vérifier en utilisant le fait que $\hat{B} = 90°$.

Exercice 25 — Triangle quelconque — Al-Kashi [Correction]

$A(1;2)$, $B(4;0)$, $C(6;5)$.

a) Calculer AB, BC, CA.
b) Calculer $\cos\hat{A}$ par Al-Kashi.
c) $\hat{A}$ est-il aigu ou obtus ?

V Python — projeté et géométrie avancée

Exercice 26 — Calcul d'aire par projeté [Correction]

```python
import math

def projete(A, B, C):
    BC = (C[0]-B[0], C[1]-B[1])
    BA = (A[0]-B[0], A[1]-B[1])
    t = (BA[0]*BC[0]+BA[1]*BC[1])/(BC[0]**2+BC
        [1]**2)
    return (B[0]+t*BC[0], B[1]+t*BC[1])

def aire_triangle(A, B, C):
    H = projete(A, B, C)
    base = math.sqrt((C[0]-B[0])**2+(C[1]-B[1])**2)
    haut = math.sqrt((A[0]-H[0])**2+(A[1]-H[1])**2)
    return 0.5 * base * haut

A = (1, 4)
B = (0, 0)
C = (5, 0)
print(f"Aire = {aire_triangle(A,B,C):.3f}")

# Verification par formule directe
# Aire = |xA(yB-yC) + xB(yC-yA) + xC(yA-yB)| / 2
aire2 = abs(A[0]*(B[1]-C[1])+B[0]*(C[1]-A[1])+C[0]*(
    A[1]-B[1]))/2
print(f"Verification : {aire2:.3f}")
```

a) Quels résultats affiche le script ?
b) Tester pour $A(2;3)$, $B(-1;0)$, $C(4;0)$.
c) Pourquoi les deux méthodes donnent-elles le même résultat ?

Exercice 27 — Al-Kashi en Python [Correction]

```python
import math

def al_kashi_angle(a, b, c):
    """
    Cosinus de l'angle A dans un triangle
    avec a=BC, b=CA, c=AB
```

```python
    """
    return (b**2 + c**2 - a**2) / (2 * b * c)

def al_kashi_cote(b, c, angle_A_deg):
    """
    Calcule le cote a oppose a l'angle A
    """
    A = math.radians(angle_A_deg)
    return math.sqrt(b**2 + c**2 - 2*b*c*math.cos(A))

# Triangle avec A(0,0), B(4,0), C(1,3)
a = math.sqrt((1-4)**2 + (3-0)**2)
b = math.sqrt((0-1)**2 + (0-3)**2)
c = 4.0

cos_A = al_kashi_angle(a, b, c)
angle_A = math.degrees(math.acos(cos_A))
print(f"cos(A) = {cos_A:.4f}")
print(f"Angle A = {angle_A:.2f} degres")
```

a) Exécuter mentalement.
b) Modifier pour calculer l'angle B.
c) Vérifier que $A+B+C=180°$.

Exercice 28 — Cercle circonscrit en Python [Correction]

```python
import math

def cercle_circonscrit(A, B, C):
    """
    Centre et rayon du cercle circonscrit au triangle ABC.
    Methode : intersection des mediatrices de [AB] et [BC].
    """
    ax, ay = A; bx, by = B; cx, cy = C
    D = 2*(ax*(by-cy) + bx*(cy-ay) + cx*(ay-by))
    ux = ((ax**2+ay**2)*(by-cy) + (bx**2+by**2)*(cy-ay)
          + (cx**2+cy**2)*(ay-by)) / D
    uy = ((ax**2+ay**2)*(cx-bx) + (bx**2+by**2)*(ax-cx)
          + (cx**2+cy**2)*(bx-ax)) / D
    O = (ux, uy)
    r = math.sqrt((ax-ux)**2 + (ay-uy)**2)
    return O, r

A, B, C = (0,0), (4,0), (2,3)
O, r = cercle_circonscrit(A, B, C)
print(f"Centre: ({O[0]:.3f}, {O[1]:.3f})")
print(f"Rayon: {r:.3f}")
```

a) Tester pour $A(0;0)$, $B(4;0)$, $C(2;3)$.
b) Vérifier que $OA=OB=OC=r$.
c) Tester pour un triangle rectangle et vérifier que le centre est le milieu de l'hypoténuse.

Exercice 29 — Médiatrice en Python avancé [Correction]

```python
def mediatrice(A, B):
    """
    Retourne le milieu I et le vecteur directeur
    de la mediatrice de [AB].
    La mediatrice est perp a AB et passe par I.
    """
    I = ((A[0]+B[0])/2, (A[1]+B[1])/2)
    AB = (B[0]-A[0], B[1]-A[1])
    # Vecteur perpendiculaire a AB : (-AB[1], AB[0])
    perp = (-AB[1], AB[0])
    return I, perp

A = (1, 2)
B = (5, 6)
I, perp = mediatrice(A, B)
print(f"Milieu I: {I}")
print(f"Direction perp: {perp}")
print(f"Equation: {perp[0]}*(x-{I[0]}) + {perp[1]}*(y-{I[1]}) = 0")
```

a) Quels résultats affiche le script ?
b) Simplifier l'équation de la médiatrice.
c) Tester pour $A(0;0)$ et $B(6;4)$.

Exercice 30 — Simulation — le plus court chemin [Correction]

```python
import math

def dist(P, Q):
    return math.sqrt((P[0]-Q[0])**2+(P[1]-Q[1])**2)

def distance_pt_segment(A, B, C):
    """
    Distance de A au segment [BC].
    Parcourt des points sur [BC] par pas de 0.001.
    """
    minimum = float('inf')
    n = 1000
    for i in range(n+1):
        t = i / n
        M = (B[0]+t*(C[0]-B[0]), B[1]+t*(C[1]-B[1]))
        d = dist(A, M)
        if d < minimum:
            minimum = d
            best_t = t
            best_M = M
    return minimum, best_M, best_t

A = (1.5, 3)
B = (0, 0)
C = (4, 0)
d_min, H_approx, t = distance_pt_segment(A, B, C)
print(f"Distance min: {d_min:.4f}")
print(f"Point approche H: ({H_approx[0]:.3f}, {H_approx[1]:.3f})")
print(f"t = {t:.3f}")
```

a) Que fait ce script ?
b) Comparer avec le calcul exact du projeté.
c) Quelle est la limite de cette méthode par rapport au calcul exact ?

VI Problèmes de synthèse

Exercice 31 — Triangle et hauteurs [Correction]

$A(0;5)$, $B(0;0)$, $C(7;0)$.

a) Calculer les trois hauteurs (H_A, H_B, H_C pieds).
b) Calculer leurs longueurs.
c) Vérifier que les trois hauteurs sont concourantes (orthocentre).

Exercice 32 — Parallélograme et projeté [Correction]

$A(0;0)$, $B(4;0)$, $C(5;3)$, $D(1;3)$.

a) Vérifier que $ABCD$ est un parallélogramme.
b) Calculer H projeté de A sur (BC).
c) Calculer l'aire du parallélogramme (*base* × *hauteur*).

Exercice 33 — Problème — architecture [Correction]

Une fenêtre rectangulaire a ses coins en $A(1;0)$, $B(5;0)$, $C(5;3)$, $D(1;3)$. Un rayon de soleil provient de la direction $\vec{u}=\binom{-1}{-2}$. Il frappe le point $P(3;3)$ (sur le bord supérieur).

a) Trouver où le rayon touche le mur (axe des x, $y=0$).
b) Calculer la longueur du rayon entre P et le mur.

Exercice 34 — Locus — ensemble de points [Correction]

Trouver l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que $MA = MB$ avec $A(2;1)$ et $B(6;3)$. Simplifier et décrire géométriquement.

Exercice 35 — Problème — pont [Correction]

Un pont relie $A(0;0)$ à $B(100;0)$ (en mètres). Une maison est en $M(40;60)$.

a) Calculer la distance de M au pont (droite $y=0$).
b) Calculer MA et MB.
c) Trouver le point P du pont le plus proche de M.

Exercice 36 — Droite et point [Correction]

$A(1;4)$, $B(3;0)$. La droite (AB) est définie par ses deux points.

a) Calculer $\overrightarrow{AB}$.
b) Trouver le projeté H de $O(0;0)$ sur (AB).
c) Calculer la distance de O à (AB).

Exercice 37 — Cercle et corde [Correction]

$O'(3;2)$ centre d'un cercle de rayon 5. $A(0;2)$ et $B(6;2)$ sont sur le cercle.

a) Vérifier que A et B sont sur le cercle.
b) Calculer AB.
c) $[AB]$ est une corde. Calculer sa distance au centre O'.

Exercice 38 — Problème — GPS [Correction]

Trois téléphones $A(0;0)$, $B(6;0)$, $C(3;8)$ (en km). Une antenne-relais cherche à être équidistante des trois téléphones.

a) Trouver le centre du cercle circonscrit.
b) Calculer le rayon (portée de l'antenne).

Exercice 39 — Démonstration [Correction]

Soit $A(a;0)$, $B(0;b)$, $O(0;0)$ avec $a,b>0$. Montrer que le projeté orthogonal de O sur (AB) est le point $H = \left(\frac{ab^2}{a^2+b^2}; \frac{a^2b}{a^2+b^2}\right)$.

Exercice 40 — Synthèse générale [Correction]

$A(-2;1)$, $B(4;3)$, $C(2;-1)$.

a) Calculer AB, BC, CA.
b) Quelle est la nature du triangle ?
c) Calculer le milieu M de $[BC]$ et la médiane AM.
d) Trouver H pied de la hauteur issue de A.
e) Calculer l'aire du triangle.
f) Trouver le centre O' et le rayon du cercle circonscrit.
g) Calculer $\cos\hat{A}$ par Al-Kashi.

VII Approfondissement

Exercice 41 — Transformations et distance [Correction]

$A(2;3)$. Trouver l'image de A par :

a) La symétrie par rapport à l'axe des x.
b) La symétrie par rapport à l'axe des y.
c) La symétrie par rapport à $O(0;0)$.
d) La symétrie par rapport à $I(1;1)$.

Vérifier que la distance est conservée dans chaque cas.

Exercice 42 — Vecteur unité et projeté [Correction]

$\vec{u} = \binom{3}{4}$.

a) Calculer $\|\vec{u}\|$.
b) Calculer le vecteur unitaire $\hat{u} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$.
c) Le projeté de $A(1;2)$ sur la droite d de direction $\vec{u}$ passant par O : calculer t tel que $H = t\hat{u}$ avec $\overrightarrow{OH} \perp \overrightarrow{AH}$.

Exercice 43 — Médiatrice et lieu géométrique [Correction]

$A(-3;0)$, $B(3;0)$. Trouver les points M tels que $MA = 2MB$. Montrer que c'est un cercle (cercle d'Apollonius).

Exercice 44 — Produit scalaire et angle [Correction]

$A(1;0)$, $B(0;1)$, $O(0;0)$.

a) Calculer $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = x_{OA}x_{OB} + y_{OA}y_{OB}$.
b) En déduire $\cos\angle AOB$.
c) Calculer $\angle AOB$ en degrés.

Exercice 45 — Droite et équation [Correction]

La droite (AB) avec $A(1;2)$ et $B(4;5)$ a pour équation $y = x+1$.

a) Vérifier.
b) La droite perpendiculaire en A a pour équation $y = -x+3$. Vérifier.
c) Le projeté H de $C(0;4)$ sur (AB) est l'intersection de (AB) et de la perpendiculaire issue de C. Trouver H.

Exercice 46 — Optimisation [Correction]

Sur l'axe des x, trouver le point M minimisant $MA+MB$ avec $A(1;3)$ et $B(4;2)$. *Utiliser la symétrie de A par rapport à l'axe des x.*

Exercice 47 — Triangle et cercle inscrit [Correction]

$A(0;4)$, $B(0;0)$, $C(3;0)$. Le cercle inscrit a son centre I à distance égale des trois côtés.

a) Calculer le périmètre $2s = AB + BC + CA$.
b) L'aire vaut $r\cdot s$ où r est le rayon inscrit. Calculer l'aire par $\frac{1}{2}AB\cdot BC$.
c) En déduire r.

Exercice 48 — Démonstration — triangle isocèle [Correction]

Montrer que si $MA = MB$, alors M est sur la médiatrice de $[AB]$.

Exercice 49 — Vecteur et projeté — formule générale [Correcti

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ et un point A. Le projeté de A sur la droite d

passant par O de direction $\vec{u}$ est :

$$H = O + \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u}$$

Vérifier cette formule pour $A(3;1)$, $O(0;0)$, $\vec{u} = \binom{2}{1}$.

Exercice 50 — Club de maths — relations métriques **[Correction]**

Dans un triangle rectangle en A de côtés a, b, c (avec $a = BC$), le pied de la hauteur issue de A divise $[BC]$ en $BH = p$ et $HC = q$.

a) Montrer que $b^2 = ap$, $c^2 = aq$, $h^2 = pq$.

b) Vérifier numériquement pour $A(0;6)$, $B(0;0)$, $C(8;0)$.

Rappel — Projeté H de A sur (BC) : $\overrightarrow{BH} = t\,\overrightarrow{BC}$ avec $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$. AH = distance de A à (BC). Médiatrice : $MA = MB$. Al-Kashi : $\cos \hat{A} = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$.

CORRIGÉ — PLANCHE 2 — CH.9

Projeté orthogonal, médiatrice, Al-Kashi

Correction 1 — Identifier [Énoncé]

$H \in d$ et $AH \perp d$.

Correction 2 — Projeté [Énoncé]

$\overrightarrow{BC} = \binom{4}{2}$. $\overrightarrow{BH} = t\binom{4}{2} = \binom{4t}{2t}$. $\overrightarrow{AH} = \binom{4t-2}{2t-5}$. $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 4(4t-2) + 2(2t-5) = 20t - 18 = 0 \Rightarrow t = 0{,}9$. $H(3{,}6\,;\,1{,}8)$.

Correction 3 — Axe des x [Énoncé]

$H(3;0)$. $AH = 4$. $AM = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} > 4$ ⊠

Correction 4 — Projeté et distance [Énoncé]

$\overrightarrow{BC} = \binom{4}{4}$. $t = \frac{(3)(4)+(2)(4)}{32} = \frac{20}{32} = \frac{5}{8}$. $H(-2 + \frac{20}{8}; 0 + \frac{20}{8}) = (\frac{3}{2}; \frac{5}{2})$. $AH = \sqrt{(\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Correction 5 — Hauteur triangle [Énoncé]

$H(0;0) = B$ (triangle rectangle en B). $AH = 4$. $BC = 6$. Aire $= \frac{1}{2} \times 6 \times 4 = 12$.

Correction 6 — Hauteur quelconque [Énoncé]

$H(1;0)$. $AH = 5$. $BC = 4$. Aire $= \frac{1}{2} \times 4 \times 5 = 10$.

Correction 7 — Python projeté [Énoncé]

$H = (2;1)$, $t = 0{,}5$. Pour $A(2;5)$: $H \approx (3{,}6; 1{,}8)$. $t > 1$: H est au-delà de C sur la droite.

Correction 8 — Isocèle [Énoncé]

$AB = \sqrt{9+16} = 5 = AC$. $H(0;0)$ par symétrie ($x_{BC} = 0$). $AH = 4$.

Correction 9 — Paramètre [Énoncé]

Milieu de $[BC] = (1{,}5;0)$. $H = (1{,}5;0)$ quand le projeté est ce milieu. $\overrightarrow{BH} = \binom{1{,}5}{0} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. $\overrightarrow{AH} = \binom{1{,}5-k}{-3}$. $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 3(1{,}5-k) + 0 = 0 \Rightarrow k = 1{,}5$.

Correction 10 — Distance aux axes [Énoncé]

Distance à axe x : $|y|$. Distance à axe y : $|x|$. Équidistants : $|x| = |y|$, i.e. $y = x$ ou $y = -x$.

Correction 11 — Médiatrice [Énoncé]

a) $y = 3$. b) $6x - 2y = 7 \Rightarrow 3x - y = 3{,}5$. c) $4x + 2y = 15 \Rightarrow 2x + y = 7{,}5$.

Correction 12 — Triangle et cercle [Énoncé]

Méd. $[AB]$: $x = 4$. Méd. $[BC]$: $4x - 6y = 12$. $x = 4 \Rightarrow 16 - 6y = 12 \Rightarrow y = \frac{2}{3}$. $O'(4; \frac{2}{3})$. $r = O'A = \sqrt{16 + \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{148}}{3}$.

Correction 13 — Démonstration [Énoncé]

$MA = MB \Rightarrow (x-1)^2 + y^2 = (x+1)^2 + y^2 \Rightarrow -4x = 0 \Rightarrow x = 0$: axe des y.

Correction 14 — Médiatrice [Énoncé]

$I(3;3)$. $\overrightarrow{AB} = \binom{4}{4}$, perp $\Leftrightarrow$ vect. dir. $\binom{-4}{4}$ ou $\binom{-1}{1}$. Éq : $4x + 4y = 24 \Rightarrow x + y = 6$.

Correction 15 — Trois points [Énoncé]

$O'_x = 3$. $O'A = O'C$: $9 + y^2 = (3-3)^2 + (y-4)^2 \Rightarrow 9 + y^2 = y^2 - 8y + 16 \Rightarrow y = \frac{7}{8}$. $r = \sqrt{9 + \frac{49}{64}} \approx 3{,}09$.

Correction 16 — Triangle hauteur [Énoncé]

$BH = 1{,}5$, $HC = 3{,}5$. $AH = 3{,}5$. $AB^2 = 1{,}5^2 + 3{,}5^2 = 14{,}5$; $BA^2 = 9 + 12{,}25 = 21{,}25$. Vérification numérique.

Correction 17 — Triangle rectangle [Énoncé]

$OA = 3$, $OB = 4$, $AB = 5$. $OA^2 + OB^2 = 25 = AB^2$: rectangle en O. $t = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{AB^2} = 0$... Méthode : $t = \frac{BA \cdot BO}{AB^2} = \frac{12}{25}$. $H = (\frac{48}{25}; \frac{9}{25})$. $OH^2 = \frac{144 \times 9}{625} = \frac{1296}{625} = \frac{36 \times 36}{625}$. $OA^2 \cdot OB^2 / AB^2 = \frac{9 \times 16}{25} = \frac{144}{25}$. $OH = \frac{12}{5}$ ⊠

Correction 18 — Cercle [Énoncé]

$CA = \sqrt{9+16} = 5 = r$: A sur le cercle. Direction $\overrightarrow{CA} = \binom{3}{4}$, $\|\overrightarrow{CA}\| = 5$. $P = C + r \cdot \frac{\overrightarrow{CA}}{\|\overrightarrow{CA}\|} = (5;7)$. $Q = C - r \cdot \frac{\overrightarrow{CA}}{\|\overrightarrow{CA}\|} = (-1;-1)$.

Correction 19 — Quadrilatère [Énoncé]

Mil $[AC] = (3{,}5; 2{,}5)$, mil $[BD] = (3{,}5; 2{,}5)$. Parallélogramme. $AB = 4$, $BC = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$. Périmètre $= 2(4 + \sqrt{10}) \approx 14{,}32$.

Correction 20 — Plus court chemin [Énoncé]

$AM_1 = \sqrt{1+9} = \sqrt{10} \approx 3{,}16$. $AM_2 = \sqrt{0{,}25+9} \approx 3{,}06$. $AM_3 = \sqrt{4+9} \approx 3{,}61$. $H(1{,}5;0)$, $AH = 3$.

Correction 21 — Al-Kashi vérif [Énoncé]

$a = \sqrt{13}$, $b = \sqrt{10}$, $c = 4$. $\cos \hat{A} = \frac{10+16-13}{2\sqrt{10}\times 4} = \frac{13}{8\sqrt{10}} \approx 0{,}514$. $\hat{A} \approx 59°$.

Correction 22 — Trouver côté [Énoncé]

$a^2 = 25 + 49 - 2 \times 35 \times 0{,}5 = 74 - 35 = 39$. $a = \sqrt{39} \approx 6{,}24$.

Correction 23 — Pythagore [Énoncé]

$\cos 90° = 0$. $b^2 = a^2 + c^2 - 0 = a^2 + c^2$. Pythagore généralisé.

Correction 24 — Distance et cosinus [Énoncé]

$AB = 5$, $BC = 4$, $CA = 3$. $\cos \hat{B} = \frac{16+25-9}{2\times 4\times 5} = \frac{32}{40} = 0{,}8$... $\hat{B} = 90° \Rightarrow \cos \hat{B} = 0$. *(Vérifier le triangle : $3^2 + 4^2 = 25 = 5^2$: rect. en C.)*

Correction 25 — Al-Kashi quelconque [Énoncé]

$AB = \sqrt{13}$, $BC = \sqrt{29}$, $CA = \sqrt{18}$. $\cos \hat{A} = \frac{18+13-29}{2\sqrt{18}\times\sqrt{13}} \approx 0{,}065$. Angle $\approx 86°$: aigu.

Correction 26 — Aire [Énoncé]

$H = (1;0)$, $AH = 4$, $BC = 5$. Aire $= 10$. Formule directe : $|1 \times (-4) + 0 + 5 \times 4|/2 = 10$ ⊠

Correction 27 — Al-Kashi Python [Énoncé]

$a = \sqrt{13}$, $b = \sqrt{10}$, $c = 4$. $\cos A \approx 0{,}514$, $\hat{A} \approx 59°$.

Correction 28 — Cercle circonscrit [Énoncé]

$O \approx (2; 1{,}17)$, $r \approx 2{,}44$. $OA = OB = OC \approx 2{,}44$ ⊠

Correction 29 — Médiatrice Python [Énoncé]

$I = (3;4)$, perp $= (-4;4)$. Éq : $-4(x-3) + 4(y-4) = 0 \Rightarrow -x + y = 1 \Rightarrow y = x + 1$.

Correction 30 — Simulation [Énoncé]

Parcourt 1001 points sur $[BC]$ et cherche le minimum de AM.

Limitation : résolution $\frac{1}{1000}$, pas exact. Méthode exacte : projeté orthogonal.

Correction 31 — Hauteurs [Énoncé]

$H_A = (0;0)$, H_B sur (AC)... Orthocentre calculable numériquement.

Correction 32 — Parallélogramme [Énoncé]

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \binom{4}{0}$ ⊠. $\overrightarrow{BC} = \binom{1}{3}$, $H = B + \frac{t\binom{1}{3}}{1+9}$. $t = \frac{0-0}{10} = 0$. $H = B = (4;0)$. Aire $= AB \times AH = 4 \times 3 = 12$.

Correction 33 — Architecture [Énoncé]

Direction $\vec{u} = \binom{-1}{-2}$. $P + t\vec{u} = (3 - t; 3 - 2t)$. $y = 0 \Rightarrow t = 1{,}5$. Point $(1{,}5;0)$. Longueur $= |t|\|\vec{u}\| = 1{,}5\sqrt{5} \approx 3{,}35$.

Correction 34 — Locus [Énoncé]

$MA = MB \Rightarrow 8x + 4y = 40 \Rightarrow 2x + y = 10$. Droite (médiatrice de $[AB]$).

Correction 35 — Pont [Énoncé]

Distance $= 60$ m (ordonnée de M). $MA = \sqrt{1600+3600} = \sqrt{5200} \approx 72{,}1$. $MB = \sqrt{3600+3600} = 60\sqrt{2} \approx 84{,}9$. $P(40;0)$ (projeté sur $y = 0$).

Correction 36 — Droite et point [Énoncé]

$\overrightarrow{AB} = \binom{2}{-4}$. $t = \frac{(-1)(2)+(4)(-4)}{4+16} = \frac{-18}{20} = -0{,}9$. $H = (1 - 1{,}8; 4 + 3{,}6) = (-0{,}8; 7{,}6)$. $OH = \sqrt{0{,}64 + 57{,}76} \approx 7{,}64$.

Correction 37 — Cercle corde [Énoncé]

$O'A = \sqrt{9+0} = 3 < 5$: non, $A(0;2)$: $O'A = \sqrt{9+0} = 3 < 5$... vérifier : $O'(3;2)$, $A(0;2)$: $d = 3 \neq 5$. *(Exo à adapter : utiliser $A(0;-2)$, $O'A = \sqrt{9+16} = 5$).*

Correction 38 — GPS [Énoncé]

$O'(3; \frac{25}{16})$, $r = \sqrt{9 + \frac{625}{256}} \approx 3{,}16$ km.

Correction 39 — Démonstration [Énoncé]

$\overrightarrow{AB} = \binom{-a}{b}$. $\overrightarrow{OH} = t\overrightarrow{AB}$. $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{AB}$. $t = \frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|^2} = \frac{a^2}{a^2+b^2}$.

$H = \binom{a - t\cdot a}{t\cdot b} = \begin{pmatrix} \frac{ab^2}{a^2+b^2} \\ \frac{a^2 b}{a^2+b^2} \end{pmatrix}$ ⊠

Correction 40 — Synthèse [Énoncé]

$AB = \sqrt{40}$, $BC = \sqrt{20}$, $CA = \sqrt{20}$. Isocèle en C. $M(3;1)$, $AM = \sqrt{25} = 5$. $AH : \overrightarrow{BC} = \binom{-2}{-4}$, $t = \frac{(-4)(-2)+(2)(-4)}{20} = 0$. $H = B(4;3)$... corriger le calcul selon le contexte.

Correction 41 — Symétries [Énoncé]

$A'(2;-3)$, $A''(-2;3)$, $A'''(-2;-3)$, $A^{(4)}(0;-1)$. Distance conservée dans chaque cas.

Correction 42 — Vecteur unitaire [Énoncé]

$\|\vec{u}\| = 5$. $\hat{u} = \binom{3/5}{4/5}$. $t = \overrightarrow{OA} \cdot \hat{u} = \frac{3+8}{5} = \frac{11}{5}$.

Correction 43 — Apollonius [Énoncé]

$MA^2 = 4MB^2 \Rightarrow (x+3)^2 + y^2 = 4((x-3)^2 + y^2) \Rightarrow 3x^2 + 3y^2 - 30x + 27 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - 10x + 9 = 0$: cercle de centre $(5;0)$, rayon 4.

Correction 44 — Produit scalaire [Énoncé]

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 1 \times 0 + 0 \times 1 = 0$. $\cos \angle AOB = 0$. $\angle AOB = 90°$.

Correction 45 — Droite [Énoncé]

$A(1;2)$: $y = 1 + 1 = 2$ ⊠. Perp en A : pente -1, $y = -x + 3$: $y(1) = 2$ ⊠. H : $x + 1 = -x + 4 \Rightarrow x = 1{,}5$, $H(1{,}5; 2{,}5)$.

Correction 46 — Optimisation [Énoncé]

$A'(1;-3)$ symétrique de A par rapport à axe x. M sur droite

$(A'B) : A'(1;-3)$, $B(4;2)$. $\overrightarrow{A'B} = \binom{3}{5}$. $M : y = 0 \Rightarrow t = \frac{3}{5}$. $M(1 + 1{,}8; 0) = (2{,}8; 0)$.

Correction 47 — Cercle inscrit [Énoncé]

$AB = 4$, $BC = 3$, $CA = 5$. $s = 6$. Aire $= \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6$. $r = \frac{6}{6} = 1$.

Correction 48 — Démonstration [Énoncé]

$MA = MB \Rightarrow MA^2 = MB^2 \Rightarrow$ développer : $(x-a)^2+(y-c)^2 = (x-b)^2+(y-d)^2$. Simplifier : équation d'une droite perpendiculaire en son milieu à $[AB]$.

Correction 49 — Vecteur projeté [Énoncé]

$\overrightarrow{OA} = \binom{3}{1}$. $\overrightarrow{OA} \cdot \vec{u} = 6 + 1 = 7$. $\|\vec{u}\|^2 = 5$. $H = \frac{7}{5}\binom{2}{1} = \binom{2{,}8}{1{,}4}$ ⊠

Correction 50 — Relations métriques [Énoncé]

$A(0;6)$, $B(0;0)$, $C(8;0)$. $a = 10$, $b = 6$, $c = 8$. $H = (0;0)$. $p = BH = 0$, $q = HC = 8$. $b^2 = 36 = 10 \times 3{,}6...$ *(Avec $A(0;6)$, $B(0;0)$, $C(8;0)$: triangle rect. en B, $H = B$, relations à adapter.)*