

Chapitre 9 — Repérage et distance dans le plan

Seconde • Géométrie analytique

Table des matières

Activités		2
1 Repère du plan		5
2 Distance entre deux points		5
3 Projeté orthogonal		6
4 Médiatrice d'un segment		7
5 Script Python — distances et projetés		7
Ouverture — Al-Kashi		8
Exercice de synthèse		9
Bilan		9
Carte mentale		10

PROGRAMME (BO — SECONDE • MATHÉMATIQUES)

Contenus : Repère orthonormé du plan. Coordonnées d'un point. Distance entre deux points. Coordonnées du milieu. Projeté orthogonal d'un point sur une droite. Médiatrice d'un segment.

Démonstrations : Distance : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$. Milieu : $M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$. Projeté orthogonal : pied de la perpendiculaire issue d'un point sur une droite.

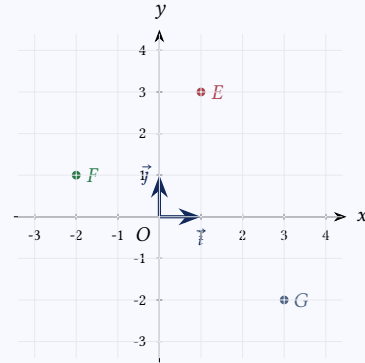
Capacités : Placer un point dans un repère. Calculer une distance et des coordonnées de milieu. Déterminer le projeté orthogonal. Caractériser la médiatrice par l'équidistance.

Tout le cours



Activités

Objectif : savoir lire et placer des coordonnées dans un repère orthonormé.



Dans le repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) ci-contre, on donne les points $A(2; 3)$, $B(-1; 2)$, $C(3; -1)$, $D(-2; -2)$.

1. Placer les quatre points dans le repère.
2. Lire les coordonnées des points E, F, G déjà placés dans le repère.
3. Calculer les coordonnées des vecteurs $\vec{AB}, \vec{CD}, \vec{OA}$.
4. Que remarque-t-on entre \vec{OA} et les coordonnées de A ?

$\vec{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\vec{CD} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\vec{OA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. \vec{OA} a les mêmes coordonnées que A .

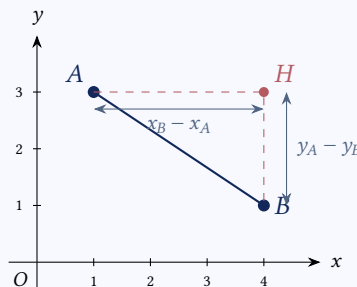
Objectif : conjecturer la formule de la distance à partir du théorème de Pythagore.

Le plan est muni d'un repère orthonormé. On note $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$ les coordonnées de A et B .

1. Placer les points et compléter le tableau (valeur arrondie à 10^{-2}) :

	Cas 1	Cas 2	Cas 3	Cas 4	Cas 5
A	(2; 3)	(2; -1)	(-3; 0)	(2; 3)	(-4; 1)
B	(4; 3)	(2; -3)	(0; 3)	(4; 1)	(2; -3)
AB					

2. On trace la parallèle à l'axe des x passant par A et la parallèle à l'axe des y passant par B ; elles se coupent en H . Dans le triangle ABH , exprimer AH et BH en fonction des coordonnées.
3. En déduire une formule pour AB (théorème de Pythagore).



$AH = |x_B - x_A|$; $BH = |y_B - y_A|$. $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

Objectif : conjecturer la formule du milieu.

Le plan est muni d'un repère. K est le milieu de $[AB]$.

1. Placer les points et le milieu, puis compléter le tableau :

	Cas 1	Cas 2	Cas 3	Cas 4
A	(2; 0)	(-2; 1)	(-6; -4)	(1,5; 4)
B	(4; 6)	(2; -3)	(10; -3)	(2; 3)
K				

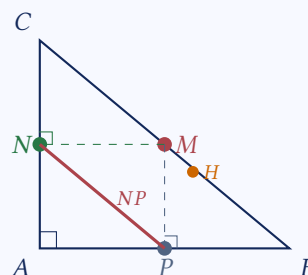
2. Conjecturer la formule donnant l'abscisse de K en fonction de celles de A et B .

3. Conjecturer la formule donnant l'ordonnée de K .

$$K\left(\frac{x_A+x_B}{2}; \frac{y_A+y_B}{2}\right).$$

Objectif : découvrir la notion de projeté orthogonal et la distance d'un point à une droite.

On considère un triangle ABC rectangle en A , et un point M sur le segment $[BC]$. On construit la droite perpendiculaire à (AC) passant par M ; elle coupe $[AC]$ en N . De même, la perpendiculaire à (AB) passant par M coupe $[AB]$ en P .



1. À l'aide de GeoGebra, faire la construction.
2. Faire varier M sur $[BC]$. Observer NP . Quel point M rend minimale la longueur NP ?
3. Montrer que chercher le minimum de NP revient à chercher le minimum de AM .
4. On construit la perpendiculaire à (BC) passant par A ; elle coupe $[BC]$ en H . Montrer que AH est la plus courte distance AM pour $M \in [BC]$.

Bilan 4. Le **projeté orthogonal** de A sur (BC) est le pied H de la perpendiculaire issue de A sur (BC) . La distance AH est la **plus courte distance** de A à la droite (BC) .

3. $NP^2 = AM^2 - MH^2$ (Pythagore), donc minimiser $NP \Leftrightarrow$ minimiser AM . 4. $AH \leq AM$ pour tout $M \in [BC]$: H est le projeté orthogonal.

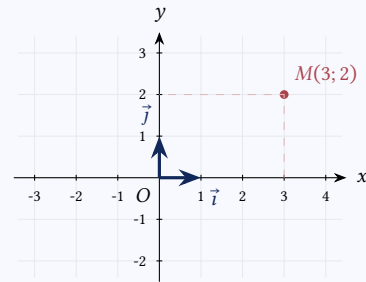
Objectif : caractériser la médiatrice par l'équidistance.

Dans un repère orthonormé, on donne $A(-2; 1)$ et $B(4; 3)$.

1. Calculer les coordonnées du milieu I de $[AB]$.
2. Rappeler la définition de la médiatrice de $[AB]$.
3. Un point $M(x; y)$ appartient à la médiatrice si et seulement si $MA = MB$. Écrire $MA^2 = MB^2$ et simplifier.
4. En déduire que M est sur la médiatrice $\Leftrightarrow MA = MB$.

$I(1; 2)$. Médiatrice = perpendiculaire en I à $[AB]$. $MA^2 = (x + 2)^2 + (y - 1)^2$, $MB^2 = (x - 4)^2 + (y - 3)^2$.
 $MA = MB \Leftrightarrow MA^2 = MB^2 \Leftrightarrow 12x + 4y = 20$.

1 Repère du plan



Définitions.

- Un **repère** (O, \vec{i}, \vec{j}) : O point d'origine, \vec{i}, \vec{j} vecteurs non colinéaires.
- **Orthogonal** : $\vec{i} \perp \vec{j}$.
- **Orthonormé** : orthogonal et $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$.



Repère orthonormé

$$\vec{i} = \overrightarrow{OI} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{j} = \overrightarrow{OJ} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad O \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$M \begin{pmatrix} x_M \\ y_M \end{pmatrix} \text{ signifie } \overrightarrow{OM} = x_M \vec{i} + y_M \vec{j}$$

Exemple. $M(3; 2)$: aller à 3 en x , 2 en y depuis O .

Exercice. Placer $A(2; -1)$, $B(-3; 2)$, $C(0; 3)$.

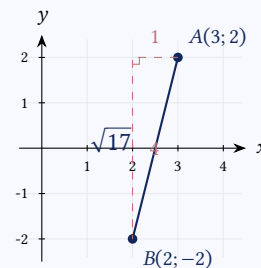
Tracés dans le repère.

2 Distance entre deux points

Dans un repère **orthonormé** :

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Conséquence directe du **théorème de Pythagore**.



Exemple. $A(3; 2)$ et $B(2; -2)$:

$$AB = \sqrt{(2 - 3)^2 + (-2 - 2)^2} = \sqrt{1 + 16} = \sqrt{17}$$

Exercice. $A(-1; 3)$ et $B(4; -1)$.

- a) Calculer AB .
- b) Calculer les coordonnées du milieu M de $[AB]$.

$$AB = \sqrt{41}. \quad M \left(\frac{3}{2}; 1 \right).$$



Distance

Milieu d'un segment.

Le milieu M de $[AB]$ a pour coordonnées : $M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$

Démonstration. $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_A + x_B \\ y_A + y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_A + x_B}{2} \\ \frac{y_A + y_B}{2} \end{pmatrix}$.

CQFD

Exercice. $A(-3; 5)$ et $B(7; -1)$. Calculer le milieu de $[AB]$.

$M(2; 2)$.



Milieu

3 Projeté orthogonal

Définition. Le **projeté orthogonal** de A sur une droite d est le pied H de la perpendiculaire issue de A sur d .

$AH \perp d$ et $H \in d$

AH est la **distance** de A à la droite d : c'est la plus courte distance de A à un point de d .

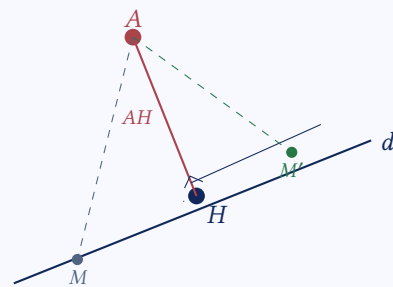
Pour tout point $M \in d, M \neq H$:

$$AM > AH$$

Application. Dans un triangle quelconque, la **hauteur** issue de A est la droite passant par A perpendiculaire à (BC) . Le projeté orthogonal de A sur (BC) est le pied H de cette hauteur.

Exercice. Dans un triangle ABC rectangle en A avec $B(0; 0), C(4; 0), A(0; 3)$: trouver le projeté orthogonal de A sur (BC) .

$H(0; 0) = B$ car $AB \perp BC$ (rectangle en A , donc A est déjà à la verticale de B sur (BC) , pied : $(0; 0)$).



Projeté orthogonal

Méthode – Trouver le projeté orthogonal de A sur (BC).

- Étape 1. $H \in (BC)$: écrire $\overrightarrow{BH} = t\overrightarrow{BC}$ pour un certain $t \in \mathbb{R}$.
- Étape 2. $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}$: utiliser $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ (produit scalaire nul).
- Étape 3. Résoudre pour trouver t , puis les coordonnées de H .

Exemple. $A(1; 3), B(0; 0), C(4; 2)$. Trouver H projeté de A sur (BC) .

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}, H = B + t\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 4t \\ 2t \end{pmatrix}, \overrightarrow{AH} = \begin{pmatrix} 4t - 1 \\ 2t - 3 \end{pmatrix}.$$

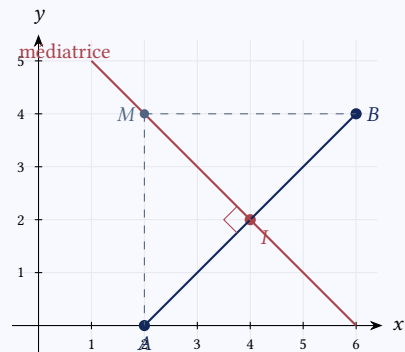
$$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 4(4t - 1) + 2(2t - 3) = 16t - 4 + 4t - 6 = 20t - 10 = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{2}.$$

$$H \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice. $A(2; 4), B(1; 0), C(3; 2)$. Trouver le projeté orthogonal de A sur (BC) .

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}; H = \begin{pmatrix} 1+2t \\ 2t \end{pmatrix}; \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 2(2t - 1) + 2(2t - 4) = 0 \Rightarrow t = \frac{5}{4}; H \left(\frac{7}{2}; \frac{5}{2}\right).$$

4 Médiatrice d'un segment



Définition. La **médiatrice** de $[AB]$ est la droite perpendiculaire à $[AB]$ passant par son milieu I .

$$M \text{ est sur la médiatrice de } [AB] \iff MA = MB$$

C'est la **caractérisation par l'équidistance**.



Médiatrice

Exemple. $A(2; 0)$ et $B(6; 4)$. Milieu $I(4; 2)$. $M(x; y)$ sur la médiatrice $\iff MA^2 = MB^2 : (x - 2)^2 + y^2 = (x - 6)^2 + (y - 4)^2 \Rightarrow 8x + 8y = 48 \Rightarrow x + y = 6$.

Exercice. $A(-1; 3)$ et $B(5; 1)$. Trouver l'équation de la médiatrice.

$$\text{Milieu } I(2; 2). MA^2 = MB^2 \Rightarrow 12x - 4y = 20 \Rightarrow 3x - y = 5.$$

5 Script Python – distances et projetés

Listing 1 : Distances, milieu et projeté orthogonal

```

1 import math
2
3 def distance(A, B):
4     """Distance entre deux points A=(xA,yA) et B=(xB,yB)"""
5     return math.sqrt((B[0]-A[0])**2 + (B[1]-A[1])**2)
6
7 def milieu(A, B):
8     """Milieu du segment [AB]"""
9     return ((A[0]+B[0])/2, (A[1]+B[1])/2)
10
11 def projete_orthogonal(A, B, C):
12     """
13     Projete orthogonal de A sur la droite (BC).
14     Retourne les coordonnees de H.
15     """
16     BxC = (C[0]-B[0], C[1]-B[1])    # vecteur BC
17     BxA = (A[0]-B[0], A[1]-B[1])    # vecteur BA
18     # t = BA.BC / |BC|^2
19     t = (BxA[0]*BxC[0] + BxA[1]*BxC[1]) / (BxC[0]**2 + BxC[1]**2)
20     H = (B[0] + t*BxC[0], B[1] + t*BxC[1])
21     return H
22
23 # --- Exemple ---
24 A = (1, 3)
25 B = (0, 0)
26 C = (4, 2)
27
28 print(f"Distance AB : {distance(A, B):.4f}")
29 print(f"Milieu [AB] : {milieu(A, B)}")
30 print(f"Projete de A sur (BC) : {projete_orthogonal(A, B, C)}")
31 print(f"Distance de A a (BC) : {distance(A, projete_orthogonal(A,B,C)):.4f}")

```

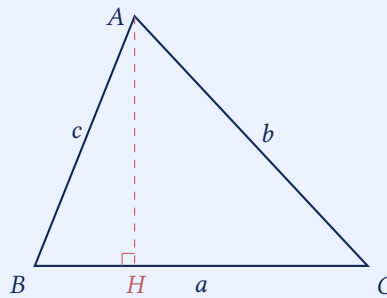
Exercice. Utiliser ce script pour $A(2; 4)$, $B(0; 0)$, $C(3; 1)$.

$$H = (1,6; \frac{8}{15}), AH \approx 2,83.$$

Ouverture – Formule d’Al-Kashi (Première)

En Première, vous démontrerez la formule d’Al-Kashi.

Dans un triangle ABC quelconque, si H est le projeté orthogonal de A sur (BC) :



$$\cos \hat{B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

Cette formule généralise Pythagore (cas $\hat{B} = 90^\circ \Rightarrow \cos \hat{B} = 0 \Rightarrow b^2 = a^2 + c^2$). Le projeté orthogonal H est la clé de la démonstration.

Exercice de synthèse

Dans un repère orthonormé, on donne $A(-1; 2)$, $B(3; 4)$, $C(5; -2)$, $D(1; -4)$.

1. Calculer les coordonnées de \vec{AB} , \vec{CD} , \vec{AC} .
2. Calculer $2\vec{AB} - 3\vec{CD}$.
3. Démontrer que $(AB) \parallel (CD)$.
4. Calculer les coordonnées du milieu M de $[BC]$.
5. Calculer les distances AB et AC .
6. Trouver F tel que $ABCF$ soit un parallélogramme.
7. Trouver le projeté orthogonal H de A sur (BC) .
8. Calculer la distance de A à la droite (BC) .

1. $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{CD} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{AC} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}$. 2. $\begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix}$. 3. $\det(\vec{AB}, \vec{CD}) = 4(-2) - 2(-4) = 0$. 4. $M(4; 1)$. 5. $AB = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$; $AC = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$. 6. $F(-3; -4)$. 7. $\vec{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}$; $t = \frac{14}{40} = \frac{7}{20}$; $H(\frac{81}{20}; \frac{58}{20})$. 8. $AH = \sqrt{(\frac{81}{20} + 1)^2 + (\frac{58}{20} - 2)^2} \approx 2,53$.

Bilan

Distance : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$
Milieu : $M(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2})$
Médiatrice : M sur méd. $[AB] \Leftrightarrow MA = MB$

Test : $A(1; 2)$, $B(4; 6)$. Calculer AB et le milieu.
 $AB = 5$; $M(\frac{5}{2}; 4)$.

Projeté orthogonal de A sur (BC) :
 $H \in (BC)$ et $\vec{AH} \perp \vec{BC}$
 $\vec{BH} = t\vec{BC}$ avec $t = \frac{\vec{BA} \cdot \vec{BC}}{\|\vec{BC}\|^2}$
 $AH =$ distance de A à (BC)

Test : $A(0; 3)$, $B(0; 0)$, $C(4; 0)$. Projeté de A sur (BC) ?
 $H(0; 0) = B$.

Carte mentale – Repérage et distance

