

Chapitre 8 — Intervalles et valeur absolue

Seconde • Nombres réels — Partie 2

Table des matières

Activités	2
1 Intervalles de \mathbb{R}	4
1.1 Notations et tableau récapitulatif	4
1.2 Appartenance à un intervalle	4
1.3 Inéquations et intervalles solutions	5
1.4 Intersection et réunion d'intervalles	5
2 Valeur absolue d'un réel	5
2.1 Définition, propriétés et distance	6
2.2 Équations et inéquations avec valeur absolue	6
2.3 Script Python — tester l'appartenance à un intervalle	7
Exercice de synthèse	7
Bilan	7
Carte mentale	8

PROGRAMME (BO — SECONDE • MATHÉMATIQUES)

Contenus : Intervalles de \mathbb{R} . Notations $+\infty$ et $-\infty$. Représentation de $[a - r; a + r]$ et caractérisation par $|x - a| \leq r$. Notation $|a|$. Distance entre deux nombres réels.

Démonstrations : (1) L'intervalle $[a - r; a + r]$ est caractérisé par $|x - a| \leq r$. (2) La distance entre a et b est $|a - b|$.

Capacités : Représenter un intervalle sur une droite graduée. Résoudre une inéquation et exprimer la solution sous forme d'intervalle. Calculer une valeur absolue et une distance. Résoudre $|x - a| = r$, $|x - a| \leq r$, $|x - a| \geq r$.

Tout le cours



Activités

Objectif : découvrir la notion d'intervalle dans un contexte réel.

La température dans une serre doit rester entre 18°C et 25°C pour que les plantes poussent bien. Un thermomètre a relevé les températures suivantes au cours de la journée :

Heure	6h	8h	10h	12h	14h	16h	20h
Temp. (°C)	15	18	22	26	28	24	17

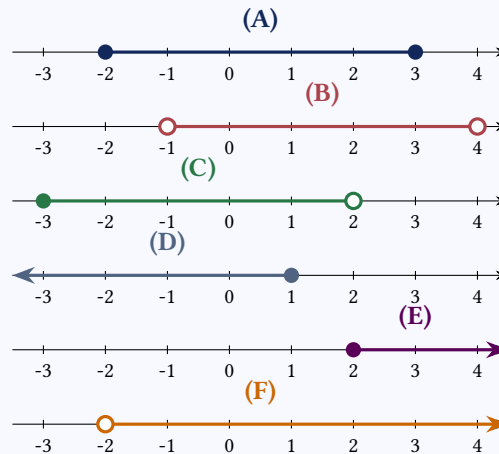
- À quelles heures la température est-elle dans l'intervalle [18 ; 25] ?
- Représenter l'intervalle [18 ; 25] sur une droite graduée et placer les températures relevées.
- Écrire sous forme d'inégalité la condition « la température T est dans l'intervalle [18 ; 25] ».
- Écrire l'ensemble des heures où la condition est satisfaite.

1. 8h, 10h, 16h. 2. Droite avec [18; 25] en trait épais. 3. $18 \leq T \leq 25$. 4. {8h; 10h; 16h}.

Bilan 1. Un **intervalle** est l'ensemble des réels x vérifiant une condition du type $a \leq x \leq b$. La notation $[a ; b]$ indique que les extrémités a et b **appartiennent** à l'intervalle.

Objectif : distinguer les différents types d'intervalles et leurs représentations.

Voici six intervalles représentés sur des droites graduées. Les points pleins • indiquent que l'extrémité est **include** ; les points creux ◦ indiquent qu'elle est **exclue**.

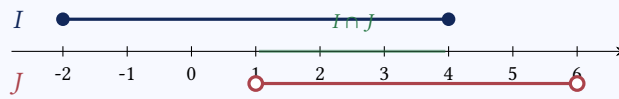


- Pour chaque intervalle (A) à (F), écrire la notation avec crochets et l'inégalité correspondante.
- Compléter : l'intervalle (A) est dit, (B) est dit, (C) est dit
- Le nombre 0 appartient-il à chacun de ces intervalles ?

(A) $[-2; 3]$, $-2 \leq x \leq 3$, fermé. (B) $]-1; 4[$, $-1 < x < 4$, ouvert. (C) $[-3; 2[$, $-3 \leq x < 2$, semi-ouvert. (D) $]-\infty; 1]$, $x \leq 1$. (E) $[2; +\infty[$, $x \geq 2$. (F) $]-2; +\infty[$, $x > -2$. 0 : (A) oui, (B) oui, (C) oui, (D) oui, (E) non, (F) oui.

Objectif : comprendre \cap et \cup à l'aide de représentations graphiques.

Soient $I = [-2; 4]$ et $J =]1; 6[$.

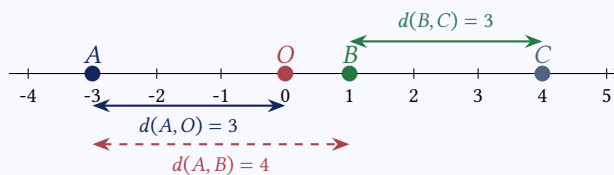


1. En utilisant la figure, déterminer $I \cap J$ (zone commune).
2. Déterminer $I \cup J$ (zone totale couverte).
3. Maintenant prendre $I =]-\infty; -1]$ et $J = [2; 5]$. Représenter sur une droite et calculer $I \cap J$ et $I \cup J$.
4. **Règle générale :** quand deux intervalles ne se chevauchent pas, que vaut leur intersection?

1. $I \cap J =]1; 4]$. 2. $I \cup J = [-2; 6[$. 3. $I \cap J = \emptyset$; $I \cup J =]-\infty; -1] \cup [2; 5]$. 4. $I \cap J = \emptyset$.

Objectif : relier la valeur absolue à la notion de distance.

Sur la droite numérique ci-dessous, on place les points $A(-3)$, $B(1)$, $C(4)$ et $O(0)$.



1. Calculer $|-3 - 0|$, $|0 - (-3)|$, $|1 - 4|$, $|4 - 1|$, $|-3 - 1|$.
2. Que remarque-t-on entre ces calculs et les distances sur la figure ?
3. Calculer $|-5|$, $|7|$, $|0|$, $|-2,5|$. Que représente $|x|$ géométriquement ?
4. Compléter : $d(a, b) = \dots\dots\dots$

1. $|-3| = 3$; $|3| = 3$; $|-3| = 3$; $|3| = 3$; $|-4| = 4$. 2. $d(a, b) = |a - b|$. 3. $|x|$ est la distance de x à 0. 4. $d(a, b) = |a - b| = |b - a|$.

Objectif : découvrir la caractérisation d'un intervalle centré par la valeur absolue.

1. Résoudre $|x - 3| \leq 2$ en utilisant la définition : $|x - 3| \leq 2$ signifie que la distance entre x et 3 est ≤ 2 . Représenter graphiquement.
2. Même question pour $|x - 3| = 2$ et $|x - 3| \geq 2$.
3. En déduire les règles générales pour $|x - a| \leq r$, $|x - a| = r$, $|x - a| \geq r$ (avec $r > 0$).
4. **Application :** écrire l'intervalle $[1; 9]$ sous la forme $|x - a| \leq r$. Identifier a et r .

1. $x \in [1; 5]$ (centré en 3, rayon 2). 2. $|x - 3| = 2 : x = 1$ ou $x = 5$. $|x - 3| \geq 2 : x \leq 1$ ou $x \geq 5$. 3. Voir cours. 4. $[1; 9]$ centré en 5, rayon 4 : $|x - 5| \leq 4$.

Bilan 5. L'intervalle $[a - r; a + r]$ est centré en a , d'amplitude $2r$. Il est caractérisé par : $|x - a| \leq r$.

1 Intervalles de \mathbb{R}

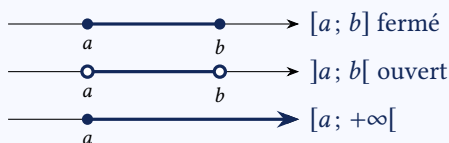
1.1 Notations et tableau récapitulatif

Définitions.

- Un **intervalle** est l'ensemble des réels x vérifiant une inégalité.
- **Fermé** $[a; b]$: les extrémités appartiennent.
- **Ouvert** $]a; b[$: les extrémités n'appartiennent pas.
- **Semi-ouvert** $[a; b[$ ou $]a; b]$.

$\mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$ (∞ n'est pas un nombre réel
– toujours crochet ouvert)

Représentation graphique :



Condition	Intervalle
$2 \leq x \leq 4$	$[2; 4]$
$-1 < x \leq 3$	$] - 1; 3]$
$0 \leq x < 2$	$[0; 2[$
$2 < x < 4$	$]2; 4[$
$x \geq 2$	$[2; +\infty[$
$x > -1$	$] - 1; +\infty[$
$x \leq 3$	$] - \infty; 3]$
$x < 2$	$] - \infty; 2[$



Intervalles – cours

1.2 Appartenance à un intervalle

$$x \in [a; b] \Leftrightarrow a \leq x \leq b$$

$$x \in]a; b[\Leftrightarrow a < x < b$$

Attention : crochet ouvert = extrémité **exclue**.

Exemple. $I =]\frac{3}{4}; 5]$.

- $1 \in I$ car $\frac{3}{4} < 1 \leq 5$.
- $\frac{3}{4} \notin I$: extrémité gauche exclue.
- $\sqrt{10} \in I$ car $3 < \sqrt{10} < 4 \subset I$.

Exercice. $J =]-3; \sqrt{5}]$. Parmi $-3, 0, 2, \sqrt{5}, 3$: lesquels $\in J$?

$0 \in J, 2 \in J, \sqrt{5} \in J. -3 \notin J$ (exclu), $3 \notin J$ ($3 > \sqrt{5} \approx 2,24$).



Appartenance à un intervalle

1.3 Inéquations et intervalles solutions

Règles sur les inégalités :

- Ajouter/soustraire un même nombre : inégalité **conservée**.
- Multiplier/diviser par un réel > 0 : inégalité **conservée**.
- Multiplier/diviser par un réel < 0 : inégalité **inversée**.

Exemple. $2x - 3 < 4$:

$$2x < 7 \Rightarrow x < \frac{7}{2} \Rightarrow x \in]-\infty; \frac{7}{2}[$$

Exercice. Résoudre et exprimer sous forme d'intervalle : a) $3x + 1 \geq 7$ b) $-2x + 5 < 1$ c) $1 \leq 2x - 1 < 5$

a) $x \geq 2 : [2; +\infty[$. b) $x > 2 :]2; +\infty[$. c) $1 \leq x < 3 : [1; 3[$.



Inéquations et intervalles

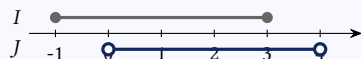
1.4 Intersection et réunion d'intervalles

Intersection $A \cap B$: éléments dans **A et** dans **B**.

Réunion $A \cup B$: éléments dans **A ou** dans **B**.

Si $A \cap B = \emptyset$: les intervalles **ne se chevauchent pas**.

Exemple. $I = [-1; 3]$ et $J =]0; 4[$:



$$I \cap J =]0; 3] \quad I \cup J = [-1; 4[$$

Exercice. $I = [-2; 4]$ et $J =]1; 6[$. Calculer $I \cap J$ et $I \cup J$.

$$I \cap J =]1; 4]. \quad I \cup J = [-2; 6[$$



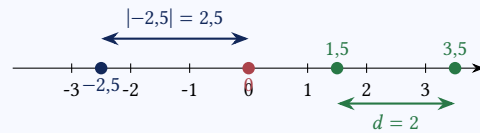
Intersection



Réunion

2 Valeur absolue d'un réel

2.1 Définition, propriétés et distance



Définition.

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Propriétés :

- $|x| \geq 0$ $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $|-x| = |x|$ $|ab| = |a| \cdot |b|$
- $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ ($b \neq 0$)
- **Inégalité triangulaire :** $|a + b| \leq |a| + |b|$



Distance.

$$d(a, b) = |a - b| = |b - a|$$

Exemple : $d(1,5, 4) = |1,5 - 4| = |-2,5| = 2,5$.

Exercice. Calculer $|-7|$, $|3 - 8|$, $d(2, -3)$.

7; 5; 5.

2.2 Équations et inéquations avec valeur absolue

Soit $r > 0$:

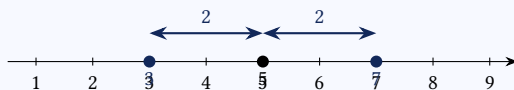
$$|x - a| = r \Leftrightarrow x = a - r \text{ ou } x = a + r$$

$$|x - a| \leq r \Leftrightarrow x \in [a - r; a + r]$$

$$|x - a| \geq r \Leftrightarrow x \leq a - r \text{ ou } x \geq a + r$$

L'intervalle $[a - r; a + r]$ est **centré en a** , d'amplitude $2r$.

Exemple. $|x - 5| = 2$: distance de x à 5 est 2.



$x = 3$ ou $x = 7$.

Exercice. Résoudre : a) $|x - 3| = 4$ b) $|x + 1| \leq 3$ c) $|x - 2| \geq 1$

a) $x = -1$ ou $x = 7$. b) $[-4; 2]$. c) $x \leq 1$ ou $x \geq 3$.



2.3 Script Python – tester l'appartenance à un intervalle

Algorithme. Le script suivant teste si un nombre x appartient à l'intervalle $[a; b]$:

Listing 1 : Test d'appartenance à un intervalle

```

1 def appartient_intervalle(x, a, b):
2     """Teste si x appartient a l'intervalle [a ; b]"""
3     if a <= x <= b:
4         return True
5     else:
6         return False
7
8 # Programme principal
9 a = float(input("Borne inferieure a : "))
10 b = float(input("Borne superieure b : "))
11 x = float(input("Valeur a tester x : "))
12
13 if appartient_intervalle(x, a, b):
14     print(f"{x} appartient a [{a} ; {b}]")
15 else:
16     print(f"{x} n'appartient pas a [{a} ; {b}]")
    
```

Exercice. Modifier le script pour tester l'appartenance à $]a; b[$ (ouvert).

Remplacer $a \leq x \leq b$ par $a < x < b$.

Exercice de synthèse

- Représenter sur une droite graduée : $[-3; 2[$, $] -\infty; 1]$, $[0; +\infty[$.
- $I = [-2; 5]$ et $J =]1; 7[$. Calculer $I \cap J$ et $I \cup J$.
- Résoudre et donner les solutions sous forme d'intervalle : a) $3x - 2 \leq 7$ b) $-x + 4 > 1$ c) $2 \leq 3x + 1 < 10$
- Calculer $|-7|$, $|3 - 8|$, $|8 - 3|$, $d(2, -3)$.
- Résoudre : $|x - 3| = 5$, $|x + 2| \leq 4$, $|x - 1| \geq 2$.
- Donner l'intervalle $[a - r; a + r]$ correspondant à $|x - 7| \leq 3$.
 1. Tracés sur droite graduée. 2. $I \cap J =]1; 5]$; $I \cup J = [-2; 7[$. 3a. $] -\infty; 3]$. 3b. $] -\infty; 3[$. 3c. $[\frac{1}{3}; 3[$. 4. $7; 5; 5;$
 5. $5. x = -2$ ou $x = 8$; $[-6; 2]; x \leq -1$ ou $x \geq 3$. 6. $[4; 10]$.

Bilan

Intervalles :

$[a; b]$ fermé $]a; b[$ ouvert
 $[a; +\infty[$ $] -\infty; b]$
 $\mathbb{R} =] -\infty; +\infty[$
 $A \cap B$: éléments communs
 $A \cup B$: tous les éléments

Test : $[-1; 3] \cap]1; 5[= ?$
 $]1; 3]$.

Valeur absolue :

$|x|$ = distance de x à 0
 $d(a, b) = |a - b|$
 $|x - a| = r \Leftrightarrow x = a \pm r$
 $|x - a| \leq r \Leftrightarrow x \in [a - r; a + r]$

Test : $|x - 2| \leq 5$ donne quel intervalle?
 $[-3; 7]$.

Carte mentale – Intervalles et valeur absolue

