Planche 2 — Notion de fonction

Seconde • Chapitre 7 • 25 exercices — Résolution graphique, signes, modélisation avancée

I Résolution graphique d'équations

Exercice 1 — Résoudre $f(x) = k$ — courbe donnée [Correction]

On considère la courbe de f définie sur $[-1; 5]$. Elle passe par $(0; 2)$, $(1; 5)$, $(2; 6)$, $(3; 5)$, $(4; 2)$, $(5; -1)$.

a) Résoudre graphiquement $f(x) = 5$.
b) Résoudre graphiquement $f(x) = 2$.
c) Résoudre graphiquement $f(x) < 5$.
d) Résoudre graphiquement $f(x) \geq 2$.

Exercice 2 — Résoudre — deux fonctions [Correction]

Soit $f(x) = x^2$ et $g(x) = 2x + 3$.

a) Dresser un tableau de valeurs commun pour $x \in \{-2; -1; 0; 1; 2; 3\}$.
b) Tracer les deux courbes.
c) Résoudre graphiquement $f(x) = g(x)$.
d) Résoudre graphiquement $f(x) > g(x)$.

Exercice 3 — Résoudre — inéquation [Correction]

La courbe de f coupe la droite $y = 3$ en $x = 1$ et $x = 4$, et la courbe est au-dessus de $y = 3$ pour $x \in]1; 4[$.

a) Résoudre $f(x) = 3$.
b) Résoudre $f(x) > 3$.
c) Résoudre $f(x) \leq 3$.

Exercice 4 — Résoudre avec tableau de valeurs [Correction]

Soit $f(x) = -x^2 + 5x - 4$.

a) Compléter le tableau pour $x \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$.
b) Tracer la courbe.
c) Résoudre graphiquement $f(x) = 0$.
d) Dresser le tableau de signes de f.

Exercice 5 — Équation $f(x) = g(x)$ — algébrique [Correction]

Soit $f(x) = 2x + 1$ et $g(x) = x^2 - 2$.

a) Résoudre algébriquement $f(x) = g(x)$.
b) Vérifier graphiquement.
c) Résoudre $f(x) > g(x)$.

II Tableau de signes

Exercice 6 — Tableau de signes — produit [Correction]

Soit $f(x) = (x - 2)(x + 1)$.

a) Calculer les zéros de f.
b) Dresser le tableau de signes de f.
c) Résoudre $f(x) \leq 0$.

Exercice 7 — Tableau de signes — quotient [Correction]

Soit $f(x) = \dfrac{x - 3}{x + 2}$ (définie pour $x \neq -2$).

a) Étudier le signe du numérateur et du dénominateur.
b) Dresser le tableau de signes de f.
c) Résoudre $f(x) > 0$.

Exercice 8 — Signe et résolution [Correction]

Soit $f(x) = x^2 - 5x + 6$.

a) Factoriser $f(x)$ (les racines sont 2 et 3).
b) Dresser le tableau de signes de f.
c) Résoudre $f(x) < 0$.
d) Résoudre $f(x) \geq 0$.

Exercice 9 — Signe — expression avec racine carrée [Correctio

Soit $f(x) = \sqrt{x} - 2$ (définie pour $x \geq 0$).

a) Quel est le zéro de f ?
b) Dresser le tableau de signes de f sur $[0; +\infty[$.
c) Résoudre $\sqrt{x} > 2$.

Exercice 10 — Tableau de signes et inéquation contextuelle [C

Le bénéfice (en milliers d'euros) d'une entreprise est $B(x) = (x - 1)(5 - x)$ où x est le prix de vente (en €), $x \in [0; 6]$.

a) Calculer les zéros de B.
b) Dresser le tableau de signes.
c) Pour quelles valeurs de x l'entreprise est-elle bénéficiaire ?

III Modélisation avancée

Exercice 11 — Contexte — énergie solaire [Correction]

La puissance P (en watts) produite par un panneau solaire varie selon l'heure h (de 6 h à 18 h). Un modèle donne : $P(h) = -5(h - 12)^2 + 500$.

a) Calculer $P(6)$, $P(9)$, $P(12)$, $P(15)$, $P(18)$.
b) Dresser un tableau de valeurs.
c) Tracer la courbe pour $h \in [6; 18]$.

d) À quelles heures la puissance est-elle supérieure à 320 W ?

Exercice 12 — Contexte — piscine [Correction]

Le niveau d'eau N (en cm) dans une piscine varie selon le temps t (en heures). On remplit la piscine à partir de $t = 0$: $N(t) = 3t$ pour $0 \leq t \leq 10$. Puis on laisse évaporer : $N(t) = -0{,}5(t-10) + 30$ pour $t > 10$.

a) Calculer $N(0)$, $N(5)$, $N(10)$, $N(20)$.
b) Tracer la courbe pour $t \in [0; 30]$.
c) Pour quelles valeurs de t le niveau est-il supérieur à 20 cm ?
d) Quand la piscine est-elle vide ?

Exercice 13 — Contexte — température [Correction]

La température T (en °C) dans une ville varie au cours de la journée. Un modèle donne (en °C, t en heures, $0 \leq t \leq 24$) : $T(t) = -0{,}5t^2 + 12t - 12$.

a) Calculer $T(0)$, $T(6)$, $T(12)$, $T(18)$, $T(24)$.
b) Dresser un tableau de valeurs pour $t \in \{0; 3; 6; 9; 12; 15; 18; 21; 24\}$.
c) Tracer la courbe.
d) À quelle heure la température est-elle maximale ? Quelle est-elle ?
e) Résoudre graphiquement $T(t) \geq 20$.

Exercice 14 — Contexte — démographie [Correction]

La population P (en milliers) d'une ville est modélisée par $P(t) = 2t^2 - 8t + 50$ où t est le nombre d'années depuis 2000.

a) Calculer $P(0)$, $P(2)$, $P(5)$, $P(10)$.
b) Quand la population est-elle minimale ? Quel est ce minimum ?
c) Tracer la courbe pour $t \in [0; 10]$.
d) Résoudre graphiquement $P(t) = 58$.

Exercice 15 — Offre, demande et équilibre [Correction]

Une étude économique donne : offre $O(p) = p - 10$ et demande $D(p) = -2p + 70$, pour $p \in [10; 35]$ (prix en euros).

a) Compléter le tableau pour $p \in \{10; 15; 20; 25; 30; 35\}$.
b) Tracer les droites représentatives.
c) Déterminer algébriquement le prix d'équilibre.
d) Résoudre graphiquement $O(p) > D(p)$.

IV Problèmes ouverts

Exercice 16 — Problème — rectangles [Correction]

On dispose d'un fil de 40 cm qu'on plie pour former un rectangle de largeur x cm.

a) Exprimer la longueur du rectangle en fonction de x.
b) Exprimer l'aire $A(x)$.
c) Sur quel intervalle x est défini ?
d) Tracer la courbe et déterminer le maximum de $A(x)$.

Exercice 17 — Problème — projectile [Correction]

Un ballon est lancé verticalement. Sa hauteur (en m) est $h(t) = -5t^2 + 20t$ (t en secondes).

a) Calculer $h(0)$, $h(1)$, $h(2)$, $h(3)$, $h(4)$.
b) Tracer la courbe pour $t \in [0; 4]$.
c) Quand le ballon atteint-il sa hauteur maximale ?
d) À quel moment est-il à 15 m de hauteur ?

Exercice 18 — Problème — tarification téléphonique [Correction]

Opérateur A : 0,10 €/min. Opérateur B : abonnement 5 €/mois + 0,05 €/min. Soit t le nombre de minutes appelées.

a) Exprimer $A(t)$ et $B(t)$.
b) Pour quelle durée les coûts sont-ils égaux ?
c) Représenter graphiquement et interpréter.
d) Pour $t = 80$ min : quel opérateur est le plus économique ?

Exercice 19 — Modélisation — médicament [Correction]

La concentration C (en mg/L) d'un médicament dans le sang varie selon : $C(t) = 4t \cdot e^{-0{,}5t}$ (modèle approché ; utiliser la calculatrice). On donne les valeurs : $C(0) = 0$, $C(1) \approx 2{,}4$, $C(2) \approx 5{,}4$, $C(4) \approx 4{,}9$, $C(6) \approx 2{,}0$, $C(10) \approx 0{,}3$.

a) Tracer la courbe approximative.
b) Lire graphiquement la concentration maximale.
c) Résoudre graphiquement $C(t) \geq 2$.

Exercice 20 — Vrai / Faux — fonctions [Correction]

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse. Si fausse, donner un contre-exemple.

a) Une fonction associe à chaque x un unique $f(x)$.
b) Un nombre peut avoir plusieurs images par f.
c) Un nombre peut avoir plusieurs antécédents par f.
d) Si $f(a) = f(b)$ alors $a = b$.
e) La courbe de f peut couper une droite horizontale en plusieurs points.

Exercice 21 — Synthèse — fonctions affines [Correction]

Soit $f(x) = 2x + 3$ et $g(x) = -x + 9$.

a) Calculer les images de -1, 0, 3 par f et g.
b) Résoudre algébriquement $f(x) = g(x)$.
c) Résoudre $f(x) < g(x)$.
d) Tracer les deux droites et vérifier graphiquement.

Exercice 22 — Synthèse — signe et résolution [Correction]

On sait que $f(x) = (2x-1)(x+3)$.

a) Calculer les zéros de f.
b) Dresser le tableau de signes.
c) Résoudre $(2x-1)(x+3) < 0$.
d) Résoudre $(2x-1)(x+3) \geq 0$.

Exercice 23 — Synthèse — tableau de valeurs et analyse [Corre

Soit $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$ (définie pour $x \neq -1$).

a) Calculer $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(-2)$, $f(-3)$.
b) Dresser un tableau de valeurs pour $x \in \{-3; -2; 0; 1; 2; 3\}$.
c) Quel est l'antécédent de 0 ?
d) Sur quel ensemble f est-elle définie ?

Exercice 24 — Problème ouvert — chemin optimal **[Correction]**

Un randonneur part du point A et veut rejoindre B. Il peut marcher à 5 km/h sur la route et à 3 km/h en terrain. La configuration géographique donne : $T(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+9}}{3} + \dfrac{4-x}{5}$ où $x \in [0; 4]$ est la distance (en km) le long du terrain.

a) Calculer $T(0)$, $T(1)$, $T(2)$, $T(3)$, $T(4)$.
b) Dresser un tableau de valeurs (arrondir à 10^{-2}).
c) Lire graphiquement le minimum de T.

Exercice 25 — Club de maths — zéros d'une fonction **[Correcti**

Soit $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$. On admet que $f(1) = 0$, $f(2) = 0$, $f(3) = 0$.

a) Vérifier chacune de ces valeurs.
b) Dresser un tableau de valeurs pour $x \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$.
c) Tracer la courbe sur $[0; 4]$.
d) Résoudre graphiquement $f(x) \leq 0$.

Rappel — $f(x) = k$ graphiquement : abscisses des intersections avec $y = k$. $f(x) > k$: courbe au-dessus de $y = k$. $f(x) = g(x)$: abscisses des intersections des deux courbes. Tableau de signes : identifier les zéros, puis tester le signe entre les zéros.

m-rudasingwa

CORRIGÉ — PLANCHE 2 — CH.7

Résolution graphique, signes, modélisation avancée

Correction 1 — Résoudre $f(x) = k$ [Énoncé]

$f(x) = 5 : x = 1$ et $x = 3$. $f(x) = 2 : x = 0$ et $x = 4$. $f(x) < 5 :$ $]-\infty; 1[\cup]3; +\infty[$ restreint à $[-1; 5]$. $f(x) \geq 2 : [0; 4]$.

Correction 2 — Deux fonctions [Énoncé]

$x^2 = 2x + 3 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+1) = 0$. $x = -1$ ou $x = 3$. $f(x) > g(x) : x < -1$ ou $x > 3$.

Correction 3 — Inéquation [Énoncé]

$f(x) = 3 : \{1; 4\}$. $f(x) > 3 :]1; 4[$. $f(x) \leq 3 :]-\infty; 1]\cup[4; +\infty[$.

Correction 4 — Tableau et signes [Énoncé]

$f(0) = -4$; $f(1) = 0$; $f(2) = 2$; $f(3) = 2$; $f(4) = 0$; $f(5) = -4$. Zéros : $x = 1$ et $x = 4$. $f(x) < 0$ sur $]-\infty; 1[\cup]4; +\infty[$.

Correction 5 — Algébrique [Énoncé]

$2x + 1 = x^2 - 2 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = -1$ ou $x = 3$. $f(x) > g(x) :]-1; 3[$.

Correction 6 — Produit [Énoncé]

Zéros : $x = 2$ et $x = -1$. $f(x) \leq 0 : [-1; 2]$.

Correction 7 — Quotient [Énoncé]

$f(x) > 0$: num et dén de même signe. $x > 3$ et $x > -2 : x > 3$. Ou $x < 3$ et $x < -2 : x < -2$. Solution : $]-\infty; -2[\cup]3; +\infty[$.

Correction 8 — Signe [Énoncé]

$f(x) = (x-2)(x-3)$. $f(x) < 0 :]2; 3[$. $f(x) \geq 0 :$ $]-\infty; 2] \cup [3; +\infty[$.

Correction 9 — Racine [Énoncé]

Zéro : $\sqrt{x} = 2 \Rightarrow x = 4$. $f(x) < 0$ sur $[0; 4[$. $\sqrt{x} > 2 : x > 4$.

Correction 10 — Bénéfice [Énoncé]

Zéros : $x = 1$ et $x = 5$. $B(x) > 0 :]1; 5[$ (entreprise bénéficiaire pour $1 < x < 5$).

Correction 11 — Énergie solaire [Énoncé]

$P(6) = P(18) = 0$; $P(9) = P(15) = 275$; $P(12) = 500$ W. $P(h) > 320 \Rightarrow -5(h-12)^2 > -180 \Rightarrow (h-12)^2 < 36 \Rightarrow h \in$ $]6; 18[$; exactement $h \in]6; 18[$ (lecture graphique).

Correction 12 — Piscine [Énoncé]

$N(0) = 0$; $N(5) = 15$; $N(10) = 30$; $N(20) = 25$ cm. $N > 20$: $t \in]\frac{20}{3}; +\infty[$ pour la montée ; et toujours pour la descente jusqu'à $t = 70$ h.

Correction 13 — Température [Énoncé]

$T(0) = -12$; $T(6) = 24$; $T(12) = 48$; $T(18) = 24$; $T(24) = -12$ °C. Maximum en $t = 12$ h : $T(12) = 48$ °C. $T \geq 20$: lecture graphique sur l'intervalle obtenu.

Correction 14 — Démographie [Énoncé]

$P(0) = 50$; $P(2) = 42$; $P(5) = 60$; $P(10) = 130$ (milliers). Minimum en $t = 2 : P(2) = 42$ milliers. $P(t) = 58 \Rightarrow 2t^2 - 8t - 8 = 0 \Rightarrow t = 2 \pm 2\sqrt{3}$.

Correction 15 — Offre et demande [Énoncé]

Équilibre : $p - 10 = -2p + 70 \Rightarrow 3p = 80 \Rightarrow p \approx 26{,}7$ €. $O(p) > D(p) : p > 26{,}7$ (offre supérieure à la demande).

Correction 16 — Rectangles [Énoncé]

Longueur $= 20 - x$. $A(x) = x(20-x) = -x^2 + 20x$, $x \in]0; 20[$. Maximum en $x = 10 : A = 100$ cm².

Correction 17 — Projectile [Énoncé]

$h(0) = 0$; $h(1) = 15$; $h(2) = 20$; $h(3) = 15$; $h(4) = 0$ m. Maximum en $t = 2$ s : 20 m. $h(t) = 15 \Rightarrow t = 1$ s ou $t = 3$ s.

Correction 18 — Téléphonie [Énoncé]

$A(t) = 0{,}1t$; $B(t) = 5 + 0{,}05t$. $0{,}1t = 5 + 0{,}05t \Rightarrow t = 100$ min. Pour $t = 80$ min : $A(80) = 8$ €; $B(80) = 9$ € : A plus économique.

Correction 19 — Médicament [Énoncé]

Pic de concentration : $C \approx 5{,}9$ mg/L vers $t = 2$ h. $C(t) \geq 2$: $t \in [1; 6]$ (lecture graphique approximative).

Correction 20 — Vrai/Faux [Énoncé]

a) Vrai. b) Faux : une image est unique. c) Vrai : ex. $f(x) = x^2$, $f(2) = f(-2) = 4$. d) Faux : $f(x) = x^2$, $f(2) = f(-2)$. e) Vrai : ex. $f(x) = \sin(x)$ coupe $y = 0$ en plusieurs points.

Correction 21 — Affines [Énoncé]

$f(-1) = 1$; $g(-1) = 10$. $f(0) = 3$; $g(0) = 9$. $f(3) = 9$;

$g(3) = 6$. $2x + 3 = -x + 9 \Rightarrow x = 2$. $f(x) < g(x) : x < 2$.

Correction 22 — Signe [Énoncé]

Zéros : $x = \frac{1}{2}$ et $x = -3$. $(2x-1)(x+3) < 0 : x \in]-3; \frac{1}{2}[$. $(2x-1)(x+3) \geq 0 : x \in]-\infty; -3] \cup [\frac{1}{2}; +\infty[$.

Correction 23 — Fraction [Énoncé]

$f(0) = 0$; $f(1) = \frac{1}{2}$; $f(2) = \frac{4}{3}$; $f(-2) = -4$; $f(-3) = \frac{9}{2}$. Antécédent de 0 : $x = 0$. Domaine : $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Correction 24 — Chemin [Énoncé]

$T(0) \approx 1{,}80$; $T(1) \approx 1{,}72$; $T(2) \approx 1{,}74$; $T(3) \approx 1{,}87$; $T(4) \approx 2{,}00$ h. Minimum vers $x \approx 1$ km.

Correction 25 — Zéros [Énoncé]

$f(1) = 1 - 6 + 11 - 6 = 0$ ⊠. $f(2) = 8 - 24 + 22 - 6 = 0$ ⊠. $f(3) = 27 - 54 + 33 - 6 = 0$ ⊠. $f(x) \leq 0 :]-\infty; 1] \cup [2; 3]$.

m-rudasin