Chapitre 7 — Notion de fonction

Seconde • Fonctions

Table des matières

PROGRAMME (BO — SECONDE • MATHÉMATIQUES)

Contenus : Notion de fonction. Vocabulaire et notations : $f(x)$, image, antécédent. Représentation graphique. Lecture graphique. Résolution graphique de $f(x) = k$, $f(x) = g(x)$, $f(x) < g(x)$. Tableau de signes d'une fonction.

Démonstrations : (1) Notion de fonction : image, antécédent. (2) Résolution graphique d'équations et d'inéquations.

Capacités : Calculer une image. Déterminer un antécédent. Lire graphiquement une image et des antécédents. Résoudre graphiquement $f(x) = k$ et $f(x) > g(x)$.

Tout le cours

Activités

Objectif : exprimer la dépendance d'une variable par rapport à une autre.

L'intensité sonore I (en dB) d'un concert est mesurée en fonction de la distance d (en m) à la source, à partir de 1 m.

Distance d (en m)	1	5	10	15	20	30	60
Intensité I (en dB)							

1. Par lecture graphique, compléter le tableau ci-dessus.
2. On donne les ordres de grandeur : 75 dB : conversation animée ; 90 dB : rue à grande circulation ; 100 dB : seuil de danger auditif. Déterminer la distance d correspondant à chacune de ces situations.
3. En observant le tableau de valeurs, compléter : « Lorsque d double, I diminue environ de ...dB ».
4. **Applications.** Préciser I pour $d = 100$ m, 25 m, 2 m et 50 cm. Puis déterminer la distance d correspondant à 100 dB (risque de surdité) et 24 dB (léger fond sonore).

1. Valeurs lues sur la courbe (décroissante). 2. $d_{75} \approx 60$ m ; $d_{90} \approx 10$ m ; $d_{100} \approx 3$ m. 3. I diminue environ de 6 dB. 4. Lire sur la courbe ; réponses dépendent du graphique fourni.

> **Bilan A.** Une **fonction** a été définie ici. Quelles sont les deux variables concernées ? Laquelle dépend de l'autre ?

Objectif : déterminer des images et des antécédents par lecture graphique et calcul.

La 3^{e} loi de Kepler : $P^2 = k \times d^3$ où P est la période de révolution (en années terrestres) et d la distance au Soleil (en U.A.). On admet $k = 1$.

1. Recopier et compléter le tableau suivant (arrondir à 10^{-2}) :

Planète	Mercure	Vénus	Terre	Mars	Jupiter	Saturne	Uranus	Neptune
d (U.A.)	0,39	0,72	1	1,52	5,2	9,54	19,2	30,1
P (années)								

2. On appelle P la fonction qui, à toute distance d, fait correspondre la période. À partir du tableau, tracer la courbe représentative de P pour d compris entre 0 et 6.
3. Calculer $P(0{,}95)$ et $P(1{,}5)$.
4. Pour contenir de l'eau liquide (zone d'habitabilité), on estime que $0{,}95 \leq d \leq 1{,}5$. Situer les différentes planètes et la zone d'habitabilité.
5. Tracer la courbe représentative de P en fonction de d pour d compris entre 0 et 6.
6. Cérès est une planète naine dont la période varie entre 4 et 5 années. Préciser par lecture graphique les distances minimale (périhélie) et maximale (aphélie) au Soleil.

1. Mercure : 0,24 ; Vénus : 0,61 ; Terre : 1 ; Mars : 1,87 ; Jupiter : 11,86 ; Saturne : 29,46. 3. $P(0{,}95) \approx 0{,}93$ an ; $P(1{,}5) \approx 1{,}84$ an. 6. $d \approx 2{,}5$ à 2,9 U.A.

> **Bilan B.** Quelles sont les différentes représentations de la fonction P étudiées ici ? Les comparer.

Objectif : résoudre graphiquement des équations du type $f(x) = k$ et $f(x) = g(x)$.

On considère un bien dont le prix p appartient à $[0; 100]$. La demande correspond au nombre de produits que les acheteurs sont prêts à acheter, l'offre au nombre que les vendeurs sont capables de vendre, en fonction du prix.

Prix du bien	10	30	50	80	100
Quantité de la demande	121	81	49	16	4
Quantité de l'offre					

On admet que $O(p) = \dfrac{p^2}{100}$ est la fonction offre définie en fonction du prix p.

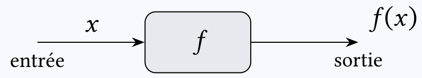
1. Décrire comment réagit la demande en fonction du prix du bien. Est-ce prévisible ?
2. Compléter le tableau de valeurs pour $O(p)$ puis décrire l'offre en fonction du prix.
3. Chercher les valeurs de p telles que $O(p) = 49$. À l'aide de la calculatrice, tracer la représentation graphique de l'offre O et de la demande D (en laissant apparaître que $D(p) = \dfrac{100}{p^2}(120 - p)$).
4. On cherche la valeur de p pour laquelle l'offre et la demande sont égales. Déterminer graphiquement le **prix d'équilibre**. Interpréter le résultat.

2. $O(10) = 1$; $O(30) = 9$; $O(50) = 25$; $O(80) = 64$; $O(100) = 100$. 3. $O(p) = 49 \Rightarrow p^2 = 4900 \Rightarrow p = 70$. 4. Prix d'équilibre : $p \approx 49$ €.

Bilan C. Soient f et g deux fonctions définies pour tout $x \in D$. Comment peut-on résoudre graphiquement les équations du type $f(x) = k$ et $f(x) = g(x)$?

1 Vocabulaire et notations

1.1 Définition d'une fonction



Définition d'une fonction

Définition.
Définir une **fonction** f sur un ensemble de réels D consiste à associer à chaque réel $x \in D$ un **unique** réel $f(x)$.
On note $f : x \longmapsto f(x)$ ou $y = f(x)$.

- D est l'**ensemble de définition** de f.
- x est la **variable** (valeur d'entrée).
- $f(x)$ est l'**image** de x par f (valeur de sortie).
- Un réel a tel que $f(a) = y$ est un **antécédent** de y.

Exemple. Abonnement théâtre : 20 € + 12 € par place.
$f : x \longmapsto 20 + 12x$, donc $f(4) = 68$.
Exercice. Soit $f(x) = 3x - 1$. Calculer $f(0)$, $f(2)$, $f(-3)$.
$f(0) = -1$; $f(2) = 5$; $f(-3) = -10$.

1.2 Trois modes de définition

On peut définir une fonction par :

1. **Une expression algébrique :** $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$. Permet de calculer exactement toute image.
2. **Un tableau de valeurs :** donne un nombre fini d'images ; ne permet pas de calculer les antécédents facilement.
3. **Une courbe représentative :** donne une représentation complète sur un intervalle ; permet de lire graphiquement images et antécédents.

> **À retenir :** une expression algébrique permet **toujours** de calculer une image. Un tableau ou une courbe ne donnent qu'une **approximation** ou un nombre **fini** de valeurs.

2 Image et antécédent

2.1 Calcul d'image

Méthode. Pour calculer l'image de a par f : remplacer x par a dans l'expression de $f(x)$.

$$\text{Image de } a = f(a)$$

Exemple. $g(x) = x^2 - 2$. Image de 6 :

$$g(6) = 6^2 - 2 = 36 - 2 = \mathbf{34}$$

Exercice. Soit $f(x) = 3x^2 - x + 1$. Calculer $f(0)$, $f(2)$, $f(-3)$.

$f(0) = 1$; $f(2) = 11$; $f(-3) = 31$.

Calculer une image

Image et antécédent

2.2 Calcul d'antécédent

Méthode. Pour trouver un antécédent de b par f : résoudre l'équation $f(x) = b$.

$$f(x) = b \;\Rightarrow\; \text{résoudre en } x$$

Un antécédent peut **ne pas exister** ou être **multiple**.

Exemple. $f(x) = 2x - 3$. Antécédent de -5 :

$$2x - 3 = -5 \Rightarrow 2x = -2 \Rightarrow x = -1$$

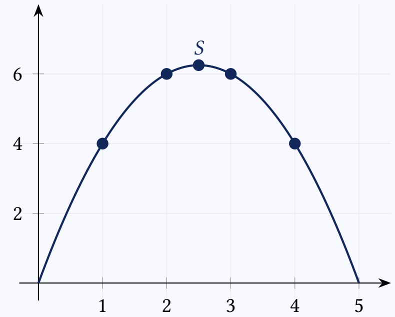
Exercice. $f(x) = 3x + 6$. Calculer $f(-2)$ et trouver l'antécédent de 0.

$f(-2) = 0$. *Antécédent de* 0 : $3x + 6 = 0 \Rightarrow x = -2$.

Antécédent algébrique

3 Représentation graphique

3.1 Courbe représentative et appartenance d'un point



Définition.
La **courbe représentative** $\mathscr{C}_f$ de f est l'ensemble des points de coordonnées $(x\,;\ f(x))$.

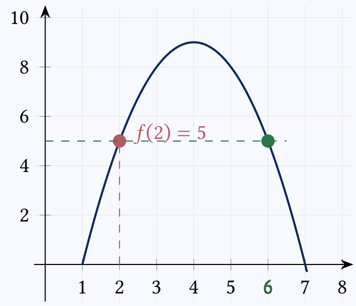
> Le point $A(a\,;\,b)$ appartient à $\mathscr{C}_f$
>
> $$\iff \quad f(a) = b$$

Courbe et appartenance

Exemple. $f(x) = x^2 + 3$. Le point $(-2\,;\,7)$: $f(-2) = 4 + 3 = 7$ ⊠ appartient à $\mathscr{C}_f$.
Exercice. $f(x) = x^2 - 2x$. Le point $(3\,;\,3)$ appartient-il à $\mathscr{C}_f$?

$f(3) = 9 - 6 = 3$ ⊠ Oui.

3.2 Lecture graphique — image et antécédent



> **Image de** a : partir de a sur l'axe des x, monter à la courbe, lire sur l'axe des y.
> **Antécédent de** b : partir de b sur l'axe des y, aller à la courbe, lire sur l'axe des x.

Exercice. Sur un graphique donné, lire $f(3)$ et tous les antécédents de 2.

Dépend du graphique fourni.

3.3 Tableau de signes d'une fonction

Le **tableau de signes** indique les intervalles où $f(x) > 0$, $f(x) < 0$ ou $f(x) = 0$.
Les valeurs où f s'annule se lisent sur la courbe (intersections avec l'axe des x).

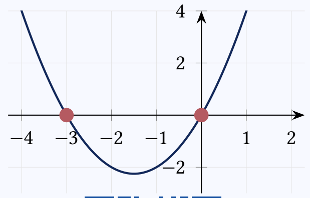


Tableau de signes

Exemple. $f(x) = x^2 + 3x$. f s'annule en -3 et 0.

x	$-\infty$		-3		0		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

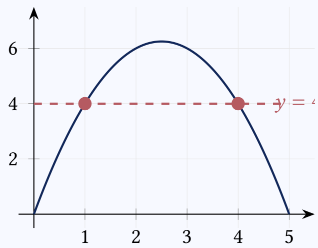
Exercice. Dresser le tableau de signes de $g(x) = x^2 - 4$.

g s'annule en -2 et 2 ; $g(x) < 0$ pour $x \in]-2;2[$.

4 Résolution graphique d'équations et d'inéquations

4.1 Résoudre $f(x) = k$ et $f(x) > k$

$f(x) = k$: lire les **abscisses** des intersections de $\mathscr{C}_f$ avec la droite $y = k$.
$f(x) > k$: lire les **intervalles** où $\mathscr{C}_f$ est **au-dessus** de $y = k$.
$f(x) < k$: courbe **en dessous** de $y = k$.



Résoudre $f(x) = k$

Exemple. $f(x) = 5x - x^2$.

— $f(x) = 4$: $\mathscr{S} = \{1 ; 4\}$

— $f(x) > 4$: $\mathscr{S} =]1 ; 4[$

Exercice. Sur le graphique de $f(x) = 5x - x^2$: a) Résoudre $f(x) = 6$. b) Résoudre $f(x) \geq 6$.

a) $x = 2$ ou $x = 3$. b) $[2;3]$.

4.2 Résoudre $f(x) = g(x)$ et $f(x) < g(x)$

$f(x) = g(x)$: **abscisses des points d'intersection** des deux courbes.
$f(x) < g(x)$: intervalles où $\mathscr{C}_g$ est **au-dessus** de $\mathscr{C}_f$.
$f(x) > g(x)$: intervalles où $\mathscr{C}_f$ est **au-dessus** de $\mathscr{C}_g$.

Exercice. Sur un graphique représentant $f(x) = x + 1$ et $g(x) = x^2 - 1$: a) Résoudre $f(x) = g(x)$. b) Résoudre $f(x) > g(x)$.

a) $x = -1$ ou $x = 2$. b) $]-1;2[$.

Comparer deux fonctions

Exercice de synthèse

1. Soit $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$. Calculer $f(0)$, $f(1)$, $f(-2)$, $f(3)$.
2. Soit $g(x) = 4x - 5$. a) Calculer l'image de 3 par g. b) Déterminer l'antécédent de 7 par g.
3. Soit $f(x) = x^2 - 2x$. Le point $(3\,;\,3)$ appartient-il à $\mathscr{C}_f$? Et $(-1\,;\,3)$?
4. Sur un graphique, $\mathscr{C}_f$ passe par $(2\,;\,5)$, $(4\,;\,5)$, $(3\,;\,8)$. a) Quel est $f(3)$? b) Quels sont les antécédents de 5 ?
5. Résoudre graphiquement $f(x) \geq 3$ si $\mathscr{C}_f$ coupe $y = 3$ en $x = 1$ et $x = 5$.

1. $f(0) = 1$; $f(1) = 0$; $f(-2) = 15$; $f(3) = 10$. *2a.* $g(3) = 7$. *2b.* $4x - 5 = 7 \Rightarrow x = 3$. *3.* $f(3) = 3$ ⊠; $f(-1) = 3$ ⊠. *4a.* $f(3) = 8$. *4b. antécédents de* 5 : 2 *et* 4. *5.* $\mathscr{S} = [1;5]$.

Bilan

Vocabulaire :
Image de $a = f(a)$ (unique).
Antécédent de $b = x$ tel que $f(x) = b$ (peut être multiple ou inexistant).
$A(a\,;\,b) \in \mathscr{C}_f \Leftrightarrow f(a) = b$.

Test : $f(x) = x^2 - 1$. Calculer $f(3)$ et trouver les antécédents de 3.

$f(3) = 8$. $x^2 - 1 = 3 \Rightarrow x = \pm 2$.

Résolution graphique :
$f(x) = k$: abscisses des intersections avec $y = k$.
$f(x) > k$: x où $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $y = k$.
$f(x) = g(x)$: abscisses des points d'intersection.

Test : Sur un graphe, $\mathscr{C}_f$ coupe $y = 2$ en $x = 1$ et $x = 3$. Résoudre $f(x) \leq 2$.

$\mathscr{S} =]-\infty; 1] \cup [3; +\infty[$.

Carte mentale — Notion de fonction