Planche 2 — Ensembles de nombres

Seconde • Chapitre 6 • 25 exercices — Démonstrations, encadrements, problèmes avancés

I Démonstrations et raisonnement

Exercice 26 — Démontrer $\frac{2}{3} \notin \mathbb{D}$ [Correction]

En utilisant la méthode vue en cours, démontrer que $\dfrac{2}{3}$ n'est pas un nombre décimal.

Exercice 27 — Démontrer $\frac{1}{6} \notin \mathbb{D}$ [Correction]

Démontrer par l'absurde que $\dfrac{1}{6}$ n'est pas un nombre décimal.

Exercice 28 — Démontrer $\frac{5}{12} \notin \mathbb{D}$ [Correction]

Démontrer que $\dfrac{5}{12}$ n'est pas décimal.

Exercice 29 — Généralisation [Correction]

Soit $\dfrac{p}{q}$ une fraction irréductible avec $q \geq 2$. Montrer que si q possède un facteur premier autre que 2 ou 5, alors $\dfrac{p}{q} \notin \mathbb{D}$.

Exercice 30 — Critère de décimalité [Correction]

Montrer qu'une fraction $\dfrac{a}{b}$ irréductible est décimale si et seulement si b est de la forme $2^m \times 5^n$ avec $m, n \in \mathbb{N}$. Appliquer à $\dfrac{7}{40}, \dfrac{3}{14}, \dfrac{11}{25}$.

Exercice 31 — $\sqrt{3}$ irrationnel [Correction]

Démontrer par l'absurde que $\sqrt{3}$ est irrationnel. (*Indication :* si a^2 est multiple de 3, alors a est multiple de 3.)

Exercice 32 — $\sqrt{5}$ irrationnel [Correction]

Démontrer par l'absurde que $\sqrt{5}$ est irrationnel.

Exercice 33 — Somme rationnel et irrationnel [Correction]

a) Démontrer que la somme d'un rationnel et d'un irrationnel est irrationnelle.
b) En déduire que $1 + \sqrt{2}$ est irrationnel.

Exercice 34 — Produit et quotient [Correction]

a) Le produit d'un rationnel non nul et d'un irrationnel est-il toujours irrationnel ? Démontrer.
b) Le quotient de deux irrationnels est-il toujours irrationnel ? Donner un exemple et un contre-exemple.

Exercice 35 — π et irrationalité [Correction]

On admet que π est irrationnel.

a) Montrer que 2π est irrationnel.
b) Montrer que $\pi + 1$ est irrationnel.
c) Le carré d'un irrationnel est-il toujours irrationnel ? Justifier.

II Encadrements et calculs

Exercice 36 — Encadrement et calcul [Correction]

On sait que $1{,}732 < \sqrt{3} < 1{,}733$. En déduire un encadrement à 10^{-3} de :

a) $3\sqrt{3}$ b) $\sqrt{3} - 1$ c) $(\sqrt{3})^2$

Exercice 37 — Valeur approchée [Correction]

Donner une valeur approchée à 10^{-4} de chaque réel :

a) $\sqrt{6}$ b) $\sqrt{11}$ c) π^2 d) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Exercice 38 — Encadrement d'une expression [Correction]

On sait que $3{,}141 < \pi < 3{,}142$. Donner un encadrement à 10^{-3} de :

a) $\pi - 3$ b) 2π c) $\dfrac{\pi}{2}$

Exercice 39 — Comparaison [Correction]

Sans calculatrice, comparer les nombres suivants.

a) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ et $\sqrt{5}$
b) $\sqrt{7}$ et $2\sqrt{2}$
c) $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ et $\sqrt{8}$

Exercice 40 — Trouver l'entier [Correction]

Trouver l'entier n tel que :

a) $n < \sqrt{5} < n + 1$
b) $n < \sqrt{11} < n + 1$
c) $n < \sqrt{50} < n + 1$

d) $n < \sqrt{200} < n+1$

III Problèmes avancés

Exercice 41 — Nombres décimaux — critère **[Correction]**

a) Montrer que $\frac{3}{8}$ est décimal.
b) Montrer que $\frac{7}{15}$ n'est pas décimal.
c) Sans calcul, dire si $\frac{11}{24}$ est décimal.

Exercice 42 — Fractions irréductibles **[Correction]**

Pour chaque fraction, la mettre sous forme irréductible, puis déterminer si elle est décimale.

a) $\frac{12}{18}$ b) $\frac{35}{56}$ c) $\frac{42}{60}$ d) $\frac{21}{35}$

Exercice 43 — QCM — ensembles **[Correction]**

Cocher la bonne réponse.

a) $\frac{10-4}{3}$ appartient à : $\mathbb{N}$ / $\mathbb{Z}$ / $\mathbb{D}$ / $\mathbb{Q}$
b) $\sqrt{16}-\sqrt{25}$ appartient à : $\mathbb{N}$ / $\mathbb{Z}$ / $\mathbb{D}$ / $\mathbb{Q}$
c) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$ appartient à : $\mathbb{N}$ / $\mathbb{Z}$ / $\mathbb{D}$ / $\mathbb{Q}$

Exercice 44 — Problème — algorithme **[Correction]**

On dit qu'un triangle rectangle est « presque isocèle » si son hypoténuse est un entier et les côtés de l'angle droit sont des entiers consécutifs.

a) Montrer que $(3,4,5)$ convient.
b) Donner un algorithme (pseudo-code) permettant de trouver tous les triangles presque isocèles dont l'hypoténuse est inférieure à 1000.
c) Trouver le suivant après $(3,4,5)$.

Exercice 45 — Nombres décimaux et fractions **[Correction]**

a) Montrer que tout décimal peut s'écrire comme une fraction.
b) La réciproque est-elle vraie ? Justifier.
c) Montrer que $0{,}1\overline{3} = \frac{2}{15}$ (où $\overline{3}$ signifie 3 répété indéfiniment).

Exercice 46 — Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ **[Correction]**

a) Trouver un rationnel compris entre $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$.
b) Trouver un irrationnel compris entre 1 et 2.
c) Peut-on toujours trouver un rationnel entre deux réels distincts ? Justifier.

Exercice 47 — Approximations célèbres de π **[Correction]**

a) $\pi \approx \frac{22}{7}$: calculer l'erreur relative.
b) $\pi \approx \frac{355}{113}$: meilleure approximation ?
c) Donner un encadrement de π à 10^{-6}.

Exercice 48 — Synthèse — classification **[Correction]**

Pour chaque nombre, déterminer le plus petit ensemble et justifier rigoureusement.

a) $\frac{(\sqrt{2})^4}{4}$
b) $\frac{\pi}{\pi}$
c) $\sqrt{2}\times\sqrt{8}$
d) $\frac{1}{\sqrt{2}}\times\sqrt{2}$
e) $\sqrt{(-3)^2}$
f) $(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)$

Exercice 49 — Problème ouvert — conjecture **[Correction]**

On considère la suite de nombres : $\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}, \sqrt[5]{5}, \ldots$

a) Calculer la valeur approchée des 5 premiers termes.
b) Parmi ces termes, lesquels sont rationnels ? Lesquels sont irrationnels ?
c) Conjecturer une propriété générale.

Exercice 50 — Démonstration finale **[Correction]**

a) Démontrer que $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ est irrationnel. (*Indication :* supposer rationnel, élever au carré, puis montrer que $\sqrt{6}$ serait rationnel — absurde.)
b) En déduire que $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ est irrationnel.

Méthode absurde — $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$: $10^n = 3a \Rightarrow 3 \mid 10^n$ impossible. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$: $a^2 = 2b^2 \Rightarrow a, b$ pairs : contradiction avec irréductibilité. Décimal $\Leftrightarrow$ dénominateur de la forme $2^m 5^n$.

Corrigé — Planche 2 — Ch.6

Démonstrations, encadrements, problèmes avancés

Correction 26 — $\frac{2}{3} \notin \mathbb{D}$ [Énoncé]

Absurde : $\frac{2}{3} = \frac{a}{10^n} \Rightarrow 2 \times 10^n = 3a \Rightarrow 3 \mid 2 \times 10^n$. $\gcd(3,2) = 1$ et $3 \nmid 10^n$: impossible. **CQFD**

Correction 27 — $\frac{1}{6} \notin \mathbb{D}$ [Énoncé]

Absurde : $\frac{1}{6} = \frac{a}{10^n} \Rightarrow 10^n = 6a \Rightarrow 6 \mid 10^n$. $6 = 2 \times 3$ et $3 \nmid 10^n$: impossible. **CQFD**

Correction 28 — $\frac{5}{12} \notin \mathbb{D}$ [Énoncé]

$12 = 4 \times 3$. Absurde : $\frac{5}{12} = \frac{a}{10^n} \Rightarrow 5 \times 10^n = 12a \Rightarrow 3 \mid 5 \times 10^n$. $3 \nmid 5$ et $3 \nmid 10^n$: impossible. **CQFD**

Correction 29 — Généralisation [Énoncé]

Si p premier $\neq 2, 5$ divise q : $\frac{p}{q} = \frac{a}{10^n} \Rightarrow p \times 10^n = qa$. $p \mid 10^n$ impossible car $p \neq 2, 5$. **CQFD**

Correction 30 — Critère [Énoncé]

Si $b = 2^m 5^n$: $\frac{a}{b} = \frac{a \times 2^k 5^l}{10^{m+n}} \in \mathbb{D}$. Si b a un facteur $p \neq 2, 5$: non décimal (voir exo 29). $\frac{7}{40} = \frac{7}{2^3 \times 5} \in \mathbb{D}$. $\frac{3}{14} = \frac{3}{2 \times 7} \notin \mathbb{D}$. $\frac{11}{25} = \frac{11}{5^2} \in \mathbb{D}$.

Correction 31 — $\sqrt{3}$ [Énoncé]

Absurde : $\sqrt{3} = \frac{a}{b}$ irréductible. $3b^2 = a^2 \Rightarrow 3 \mid a^2 \Rightarrow 3 \mid a \Rightarrow a = 3k$. $3b^2 = 9k^2 \Rightarrow b^2 = 3k^2 \Rightarrow 3 \mid b$. a, b multiples de 3 : contradiction. **CQFD**

Correction 32 — $\sqrt{5}$ [Énoncé]

Absurde : $\sqrt{5} = \frac{a}{b}$ irréductible. $5b^2 = a^2 \Rightarrow 5 \mid a^2 \Rightarrow 5 \mid a \Rightarrow a = 5k$. $5b^2 = 25k^2 \Rightarrow b^2 = 5k^2 \Rightarrow 5 \mid b$: contradiction. **CQFD**

Correction 33 — Somme [Énoncé]

Soit $q \in \mathbb{Q}$, $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Si $q + r = s \in \mathbb{Q}$: $r = s - q \in \mathbb{Q}$: contradiction. **CQFD** $1 + \sqrt{2}$: $1 \in \mathbb{Q}$, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$: irrationnel.⊠

Correction 34 — Produit et quotient [Énoncé]

Si $q \neq 0$, $q \in \mathbb{Q}$, $r \notin \mathbb{Q}$: $qr = s \in \mathbb{Q} \Rightarrow r = s/q \in \mathbb{Q}$: contradiction. Donc $qr \notin \mathbb{Q}$. **CQFD** Quotient : $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1 \in \mathbb{Q}$ (rationnel). $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \notin \mathbb{Q}$ (irrationnel). Les deux cas existent.

Correction 35 — π [Énoncé]

a) $2\pi = 2 \times \pi$: produit rationnel × irrationnel = irrationnel.⊠b) $\pi + 1$: somme rationnel + irrationnel = irrationnel.⊠c) Non : $(\sqrt{2})^2 = 2 \in \mathbb{N}$: rationnel.

Correction 36 — Déductions [Énoncé]

a) $5{,}196 < 3\sqrt{3} < 5{,}199$. b) $0{,}732 < \sqrt{3} - 1 < 0{,}733$. c) $(\sqrt{3})^2 = 3$ exactement.

Correction 37 — Valeur approchée [Énoncé]

$\sqrt{6} \approx 2{,}4495$. $\sqrt{11} \approx 3{,}3166$. $\pi^2 \approx 9{,}8696$. $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}7071$.

Correction 38 — π [Énoncé]

a) $0{,}141 < \pi - 3 < 0{,}142$. b) $6{,}282 < 2\pi < 6{,}284$. c) $1{,}570 < \frac{\pi}{2} < 1{,}571$.

Correction 39 — Comparaison [Énoncé]

a) $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 5 + 2\sqrt{6} > 5 = (\sqrt{5})^2$: $\sqrt{2} + \sqrt{3} > \sqrt{5}$. b) $(\sqrt{7})^2 = 7$ vs $(2\sqrt{2})^2 = 8$: $\sqrt{7} < 2\sqrt{2}$. c) $(\sqrt{3} + \sqrt{5})^2 = 8 + 2\sqrt{15} > 8 = (\sqrt{8})^2$: $\sqrt{3} + \sqrt{5} > \sqrt{8}$.

Correction 40 — Entier [Énoncé]

a) $2 < \sqrt{5} < 3$ ($n = 2$). b) $3 < \sqrt{11} < 4$ ($n = 3$). c) $7 < \sqrt{50} < 8$ ($n = 7$). d) $14 < \sqrt{200} < 15$ ($n = 14$).

Correction 41 — Critère décimal [Énoncé]

a) $\frac{3}{8} = \frac{3}{2^3} = \frac{3 \times 5^3}{10^3} = 0{,}375 \in \mathbb{D}$.⊠b) $15 = 3 \times 5$: $3 \mid 15$ et $3 \nmid 10^n$: non décimal.⊠c) $24 = 2^3 \times 3$: facteur 3 non décimal.

Correction 42 — Fractions irréductibles [Énoncé]

a) $\frac{2}{3}$: 3 non décimal. b) $\frac{5}{8} = \frac{5}{2^3}$: décimal (= 0,625). c) $\frac{7}{10}$: décimal (= 0,7). d) $\frac{3}{5}$: décimal (= 0,6).

Correction 43 — QCM [Énoncé]

a) $\frac{6}{3} = 2 \in \mathbb{N}$. b) $4 - 5 = -1 \in \mathbb{Z}$. c) $\frac{3+2+1}{6} = 1 \in \mathbb{N}$.

Correction 44 — Algorithme [Énoncé]

$3^2 + 4^2 = 25 = 5^2$: rectangle. 3, 4 consécutifs : presque isocèle.⊠Algorithme : pour n de 1 à 999, si $\lfloor \sqrt{n^2 + (n+1)^2} \rfloor^2 = n^2 + (n+1)^2$: afficher. Suivant : $n = 20$, $n + 1 = 21$, hyp $= 29$ (car $400 + 441 = 841 = 29^2$).

Correction 45 — Décimaux et fractions [Énoncé]

a) $0{,}d_1d_2\dots d_n = \frac{d_1\dots d_n}{10^n} \in \mathbb{Q}$.⊠b) Non : $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$ mais $\notin \mathbb{D}$. c) $0{,}1333\dots = 0{,}1 + 0{,}0\overline{3} = \frac{1}{10} + \frac{1}{30} = \frac{3+1}{30} = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$.⊠

Correction 46 — Densité [Énoncé]

a) $\sqrt{2} \approx 1{,}41$ et $\sqrt{3} \approx 1{,}73$: $\frac{3}{2} = 1{,}5 \in \mathbb{Q}$ convient. b) $\sqrt{2} \approx 1{,}41 \in (1;2)$: irrationnel entre 1 et 2. c) Oui : la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ garantit l'existence d'un rationnel entre deux réels distincts.

Correction 47 — π [Énoncé]

$\frac{22}{7} \approx 3{,}14286$: erreur $\approx 0{,}04\%$. $\frac{355}{113} \approx 3{,}141593$: erreur $\approx 8 \times 10^{-8}$: beaucoup plus précise. $3{,}141592 < \pi < 3{,}141593$.

Correction 48 — Synthèse [Énoncé]

a) $\frac{4}{4} = 1 \in \mathbb{N}$. b) $1 \in \mathbb{N}$. c) $\sqrt{16} = 4 \in \mathbb{N}$. d) $1 \in \mathbb{N}$. e) $\sqrt{9} = 3 \in \mathbb{N}$. f) $(\sqrt{2})^2 - 1^2 = 2 - 1 = 1 \in \mathbb{N}$.

Correction 49 — Suite [Énoncé]

$\sqrt[2]{2} \approx 1{,}414$; $\sqrt[3]{3} \approx 1{,}442$; $\sqrt[4]{4} = \sqrt{2} \approx 1{,}414$; $\sqrt[5]{5} \approx 1{,}380$; $\sqrt[6]{6} \approx 1{,}348$. Rationnels : $\sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$: non, irrationnel. En fait $\sqrt[n]{n}$ est rationnel seulement si $n = 1$. Conjecture : $\sqrt[n]{n}$ est irrationnel pour $n \geq 2$.

Correction 50 — Démonstration finale [Énoncé]

Supposons $\sqrt{2} + \sqrt{3} = r \in \mathbb{Q}$. $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 5 + 2\sqrt{6} = r^2 \in \mathbb{Q}$. $\sqrt{6} = \frac{r^2-5}{2} \in \mathbb{Q}$. Mais $\sqrt{6} = \sqrt{2} \times \sqrt{3}$: produit de deux irrationnels. On peut montrer $\sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$ (absurde) : contradiction.**CQFD**