

## Planche 1 — Ensembles de nombres

Seconde • Chapitre 6 • 25 exercices — Appartenance, inclusions, droite numérique

### I Appartenance aux ensembles

#### Exercice 1 — Appartenance directe [Correction]

Dire si chaque nombre appartient à  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{D}$ ,  $\mathbb{Q}$  ou  $\mathbb{R}$  (donner le plus petit). 3; -7; 0,5;  $\frac{1}{3}$ ;  $\sqrt{2}$ ; 0.

#### Exercice 2 — Plus petit ensemble [Correction]

Quel est le plus petit ensemble auquel appartient chacun des nombres suivants ?

- a)  $\frac{1}{2}$    b)  $\sqrt{5}$    c)  $\frac{10-4}{3}$    d)  $-\sqrt{16}$

#### Exercice 3 — Plus petit ensemble (2) [Correction]

- a)  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$   
 b)  $\sqrt{16} - \sqrt{25}$   
 c)  $\frac{91}{7}$   
 d)  $\frac{34}{2} - \sqrt{289}$

#### Exercice 4 — Vrai ou faux [Correction]

Pour  $x \in \mathbb{N}$ , dire si chaque affirmation est vraie ou fausse. Si fausse, donner un contre-exemple et le plus petit ensemble qui la rend vraie.

- a)  $2x + 1 \in \mathbb{N}$   
 b)  $2x + 1 \in \mathbb{Q}$   
 c)  $3x - 7 \in \mathbb{N}$

- d)  $\frac{x-6}{2} \in \mathbb{Z}$   
 e)  $\frac{x+1}{\sqrt{2}} \in \mathbb{R}$   
 f)  $\sqrt{x} \in \mathbb{Q}$

#### Exercice 5 — Trouver le nombre [Correction]

Trouver, lorsque possible, un nombre  $x$  vérifiant :

- a)  $x \in \mathbb{Q}$  et  $x \notin \mathbb{N}$   
 b)  $x \in \mathbb{Q}$  et  $x \notin \mathbb{Z}$   
 c)  $x \in \mathbb{R}$  et  $x \notin \mathbb{Q}$   
 d)  $x \in \mathbb{Q}$  et  $x \notin \mathbb{R}$

#### Exercice 6 — Décimaux ou non ? [Correction]

Lesquels de ces nombres sont des décimaux ?

- a) -5   b)  $\frac{5}{7}$    c)  $\frac{3}{40}$    d)  $\frac{40}{3}$

#### Exercice 7 — Vrai / Faux — affirmations [Correction]

Pour chaque affirmation, dire si elle est toujours vraie. Si fausse, donner un contre-exemple.

- a) La différence de deux entiers naturels est un entier naturel.  
 b) Le quotient de deux décimaux est un décimal.  
 c) Le quotient de deux réels est un rationnel.  
 d) Le produit d'un rationnel par un entier est un rationnel.

#### Exercice 8 — Irrationnels [Correction]

Trouver deux nombres irrationnels différents dont :

- a) le produit est un nombre irrationnel.  
 b) le produit est un entier naturel.

#### Exercice 9 — Symboles $\in$ et $\subset$ [Correction]

Compléter avec  $\in$  ou  $\subset$  ou  $\notin$  ou  $\not\subset$  :

- a) 5 ...  $\mathbb{Z}$   
 b)  $\mathbb{N}$  ...  $\mathbb{Z}$   
 c)  $\mathbb{D}$  ...  $\mathbb{Z}$   
 d)  $\sqrt{2}$  ...  $\mathbb{Q}$   
 e)  $\mathbb{Q}$  ...  $\mathbb{R}$   
 f)  $\pi$  ...  $\mathbb{Q}$

#### Exercice 10 — Classification [Correction]

Recopier et classer chaque nombre dans le tableau.

$-\frac{8}{3}$ ,  $\sqrt{2}$ , -0,25,  $\frac{5}{7}$ , 2,5,  $\pi$

$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{D}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$

### II Inclusions et raisonnement

#### Exercice 11 — Inclusions [Correction]

Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies ?

- a)  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$   
 b)  $\pi \in \mathbb{Q}$   
 c)  $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$   
 d)  $0,5 \in \mathbb{D}$

- e)  $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}$
- f)  $\sqrt{2} \in \mathbb{Z}$

**Exercice 12** – Démonstration  $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$  [ Correction ]

- a) Rappeler l'énoncé de la démonstration au programme.
- b) Rédiger la démonstration complète.
- c) En déduire que  $\frac{2}{3} \notin \mathbb{D}$ .

**Exercice 13** – Démonstration  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$  [ Correction ]

- a) Rappeler l'énoncé de la démonstration au programme.
- b) Rédiger la démonstration complète.

**Exercice 14** – Cercle et irrationnel [ Correction ]

On considère un cercle dont le périmètre est rationnel. Prouver que son diamètre est nécessairement irrationnel.

**Exercice 15** – Produit d'irrationnels [ Correction ]

Le professeur affirme : « Le produit de deux nombres irrationnels est toujours rationnel. »

- a) Josy répond : « Vrai,  $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2 \in \mathbb{Q}$  ». Josy a-t-il raison ?
- b) Marc répond : « Faux,  $\sqrt{5} \times \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$  ». Marc a-t-il raison ?
- c) Conclure.

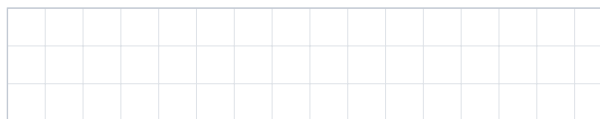
**III Droite numérique et encadrements**

**Exercice 16** – Droite numérique [ Correction ]

Représenter la droite numérique et placer les nombres suivants de façon exacte : 3; -1,5;  $\frac{5}{4}$ ;  $\frac{-2}{5}$ ;  $\sqrt{2}$ .

**Exercice 17** – Abscisses [ Correction ]

Quelles sont les abscisses des points K, L, M, N, O, P placés sur la droite numérique ci-dessous ?



**Exercice 18** – Encadrement à  $10^{-3}$  [ Correction ]

Donner un encadrement à  $10^{-3}$  de chacun des réels suivants.

- a)  $\sqrt{2}$    b)  $\sqrt{3}$    c)  $\pi$    d)  $\sqrt{10}$

**Exercice 19** – Encadrement à  $10^{-4}$  [ Correction ]

Donner un encadrement à  $10^{-4}$  de :  $\sqrt{5}$ ;  $\sqrt{7}$ ;  $\pi^2$ .

**Exercice 20** – Arrondis [ Correction ]

Donner l'arrondi des nombres suivants à la précision indiquée.

- a)  $\pi$  à  $10^{-4}$
- b)  $\sqrt{2}$  à  $10^{-3}$
- c)  $\sqrt{3}$  à  $10^{-2}$
- d)  $\frac{22}{7}$  à  $10^{-3}$

**Exercice 21** – Troncage ou arrondi? [ Correction ]

Pour chaque valeur, dire si c'est un troncage ou un arrondi.

- a)  $\pi \approx 3,14$
- b)  $\sqrt{2} \approx 1,42$
- c)  $\sqrt{3} \approx 1,73$
- d)  $\frac{1}{3} \approx 0,333$

**Exercice 22** – Encadrement et déduction [ Correction ]

On sait que  $1,414 < \sqrt{2} < 1,415$ . En déduire un encadrement à  $10^{-3}$  de :

- a)  $2\sqrt{2}$    b)  $\sqrt{2} - 1$    c)  $\frac{1}{\sqrt{2}}$

**Exercice 23** – Triangle rectangle presque isocèle [ Correction ]

Un triangle rectangle est dit « presque isocèle » si son hypoténuse est un entier et les deux côtés de l'angle droit sont des entiers consécutifs.

- a) Montrer que le triangle de côtés 3, 4, 5 est un tel triangle.
- b) Trouver deux autres exemples.

**Exercice 24** – Synthèse – ensembles [ Correction ]

Déterminer le plus petit ensemble auquel appartient :

$$\sqrt{16}; \quad -\frac{3}{5}; \quad \frac{7}{14}; \quad \frac{(\sqrt{5})^2}{5}; \quad \sqrt{7}; \quad -\frac{5(\sqrt{3})^2}{15}.$$

**Exercice 25** – Problème – rationnel ou irrationnel [ Correction ]

On considère  $a = 2\sqrt{45}$  et  $b = \sqrt{80}$ .

- a) Calculer  $a + b$  sous la forme  $c\sqrt{d}$  ( $d$  minimal).
- b) Calculer  $a \times b$ . Ce produit est-il rationnel ?
- c)  $a$  est-il rationnel ?

**Rappel** –  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ . Décimal :  $\frac{a}{10^n}$  (fini de décimales). Rationnel :  $\frac{a}{b}$ . Irrationnel : ni fraction ni décimal ( $\sqrt{2}$ ,  $\pi$ ).  $\in$  : appartient à.  $\subset$  : inclus dans.

**CORRIGÉ — PLANCHE 1 — CH.6**

Appartenance, inclusions, droite numérique

**Correction 1** – Appartenance [Énoncé]

$3 \in \mathbb{N}$ .  $-7 \in \mathbb{Z}$ .  $0,5 \in \mathbb{D}$ .  $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$ .  $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ .  $0 \in \mathbb{N}$ .

**Correction 2** – Plus petit ensemble [Énoncé]

a)  $\frac{1}{2} = 0,5 \in \mathbb{D}$ . b)  $\sqrt{5} \in \mathbb{R}$ . c)  $\frac{6}{3} = 2 \in \mathbb{N}$ . d)  $-\sqrt{16} = -4 \in \mathbb{Z}$ .

**Correction 3** – Plus petit ensemble (2) [Énoncé]

a)  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1 \in \mathbb{N}$ . b)  $4 - 5 = -1 \in \mathbb{Z}$ . c)  $13 \in \mathbb{N}$ . d)  $17 - 17 = 0 \in \mathbb{N}$ .

**Correction 4** – Vrai ou faux [Énoncé]

a) Vrai. b) Vrai. c) Faux ( $x = 0 : -7 \in \mathbb{Z}$ ) : vrai dans  $\mathbb{Z}$ .  
d) Faux ( $x = 1 : -\frac{5}{2} \in \mathbb{Q}$ ) : vrai dans  $\mathbb{Q}$ . e) Vrai. f) Faux ( $x = 2 : \sqrt{2} \in \mathbb{R}$ ) : vrai dans  $\mathbb{R}$ .

**Correction 5** – Trouver le nombre [Énoncé]

a)  $\frac{1}{2}$ . b)  $\frac{1}{3}$ . c)  $\sqrt{2}$ . d) Impossible :  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ .

**Correction 6** – Décimaux [Énoncé]

a)  $-5 = \frac{-5}{10^0} \in \mathbb{D}$ . b)  $\frac{5}{7} = 0,714285... \notin \mathbb{D}$ . c)  $\frac{3}{40} = 0,075 \in \mathbb{D}$ . d)  $\frac{40}{3} = 13,333... \notin \mathbb{D}$ .

**Correction 7** – Vrai / Faux [Énoncé]

a) Faux :  $0 - 1 = -1 \notin \mathbb{N}$ . Vrai dans  $\mathbb{Z}$ . b) Faux :  $\frac{1}{3} \div \frac{1}{3} = 1 \in \mathbb{D}$ , mais  $\frac{1}{3} \div \frac{1}{6} = 2 \in \mathbb{D}$ , et  $1 \div 3 = \frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$ . c) Faux :

$\sqrt{2} \div \sqrt{2} = 1 \in \mathbb{Q}$ , mais  $\pi \div 1 = \pi \notin \mathbb{Q}$ . d) Vrai :  $\frac{a}{b} \times n = \frac{an}{b} \in \mathbb{Q}$ .

**Correction 8** – Irrationnels [Énoncé]

a)  $\sqrt{2}$  et  $\sqrt{3} : \sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ . b)  $\sqrt{2}$  et  $\sqrt{2} : \text{produit} = 2 \in \mathbb{N}$  (même irrationnel). Ou  $\sqrt{2}$  et  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  différents : produit =  $1 \in \mathbb{N}$ .

**Correction 9** – Symboles [Énoncé]

a)  $5 \in \mathbb{Z}$ . b)  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ . c)  $\mathbb{D} \not\subset \mathbb{Z}$ . d)  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ . e)  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ . f)  $\pi \notin \mathbb{Q}$ .

**Correction 10** – Classification [Énoncé]

$\mathbb{D} : -0,25, 2,5$ .  $\mathbb{Q} : -\frac{8}{3}, \frac{5}{7}$ .  $\mathbb{R} : \sqrt{2}, \pi$ .

**Correction 11** – Inclusions [Énoncé]

a) Vrai. b) Faux. c) Vrai. d) Vrai. e) Vrai. f) Faux.

**Correction 12** – Démo  $\frac{1}{3}$  [Énoncé]

Absurde :  $\frac{1}{3} = \frac{a}{10^n} \Rightarrow 10^n = 3a \Rightarrow 3 \mid 10^n$ . Impossible car  $3 \nmid 2$  et  $3 \nmid 5$ . **CQFD**  $\frac{2}{3} = 2 \times \frac{1}{3}$  : si  $\frac{2}{3} \in \mathbb{D}$  alors  $\frac{1}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \in \mathbb{D}$  : contradiction.

**Correction 13** – Démo  $\sqrt{2}$  [Énoncé]

Absurde :  $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$  irréductible.  $a^2 = 2b^2 \Rightarrow a$  pair  $\Rightarrow a = 2k \Rightarrow b^2 = 2k^2 \Rightarrow b$  pair. Contradiction. **CQFD**

**Correction 14** – Cercle [Énoncé]

$P = \pi d$ . Si  $P \in \mathbb{Q}$  alors  $d = \frac{P}{\pi}$ . Si  $d \in \mathbb{Q} : P = \pi d$  serait irrationnel (car  $\pi \notin \mathbb{Q}$ ) : contradiction. Donc  $d \notin \mathbb{Q}$  : irrationnel. **CQFD**

**Correction 15** – Produit irrationnels [Énoncé]

Josy donne un exemple où le produit est rationnel : pas une preuve générale. Marc a raison :  $\sqrt{5} \times \sqrt{2} = \sqrt{10} \notin \mathbb{Q}$ . Conclusion : l'affirmation est **fausse** (contre-exemple de Marc).

**Correction 16** – Droite numérique [Énoncé]

Placer  $-\frac{2}{5} = -0,4$ ,  $\frac{5}{4} = 1,25$ ,  $\sqrt{2} \approx 1,41$ ,  $-1,5$ ,  $3$ .

**Correction 17** – Abscisses [Énoncé]

À déterminer sur la figure fournie par l'enseignant.

**Correction 18** – Encadrement  $10^{-3}$  [Énoncé]

$1,414 < \sqrt{2} < 1,415$ .  $1,732 < \sqrt{3} < 1,733$ .  $3,141 < \pi < 3,142$ .  $3,162 < \sqrt{10} < 3,163$ .

**Correction 19** – Encadrement  $10^{-4}$  [Énoncé]

$2,2360 < \sqrt{5} < 2,2361$ .  $2,6457 < \sqrt{7} < 2,6458$ .  $9,8696 < \pi^2 < 9,8697$ .

**Correction 20** – Arrondis [Énoncé]

a)  $\pi \approx 3,1416$  (5<sup>e</sup> chiffre =  $9 \geq 5$ ). b)  $\sqrt{2} \approx 1,414$  (4<sup>e</sup> =  $2 < 5$ ).  
c)  $\sqrt{3} \approx 1,73$  (3<sup>e</sup> =  $2 < 5$ ). d)  $\frac{22}{7} = 3,142857... \approx 3,143$ .

**Correction 21** – Troncage ou arrondi [Énoncé]

a) Troncage ( $\pi = 3,14159 \dots$ , 3<sup>e</sup> chiffre = 1 < 5, on devrait garder 3,14). b) Arrondi ( $\sqrt{2} = 1,4142 \dots$ , 3<sup>e</sup> chiffre = 4, arrondi = 1,41, donc 1,42 est faux). c) Arrondi. d) Troncage.

**Correction 22** – Dédutions [Énoncé]

a)  $2,828 < 2\sqrt{2} < 2,830$ . b)  $0,414 < \sqrt{2} - 1 < 0,415$ .  
c)  $\frac{1}{1,415} < \frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{1}{1,414}$ , soit  $0,706 < \frac{1}{\sqrt{2}} < 0,708$ .

**Correction 23** – Triangle presque isocèle [Énoncé]

$3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$  : triangle rectangle. 4 et 3 consécutifs : triangle presque isocèle. Autres : 5, 12, 13 et 8, 15, 17.

**Correction 24** – Synthèse [Énoncé]

$\sqrt{16} = 4 \in \mathbb{N}$ .  $-\frac{3}{5} \in \mathbb{Q}$ .  $\frac{7}{14} = 0,5 \in \mathbb{D}$ .  $\frac{5}{5} = 1 \in \mathbb{N}$ .  $\sqrt{7} \in \mathbb{R}$ .  
 $-\frac{5 \times 3}{15} = -1 \in \mathbb{Z}$ .

**Correction 25** – Rationnel ou irrationnel [Énoncé]

$a = 2\sqrt{45} = 2 \times 3\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$ .  $b = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$ .  $a + b = 10\sqrt{5}$ .  
 $ab = 6\sqrt{5} \times 4\sqrt{5} = 120 \in \mathbb{N}$ .  $a = 6\sqrt{5} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  (irrationnel).