Chapitre 6 — Ensembles de nombres

Seconde • Nombres réels

Table des matières

1 Les ensembles de nombres **2**

1.1 Entiers naturels et relatifs 2

1.2 Décimaux, rationnels, réels 2

2 Démonstrations au programme **2**

3 Classification et encadrements **3**

3.1 Déterminer le plus petit ensemble d'appartenance 3

3.2 Encadrements et arrondis 4

Exercice de synthèse **4**

Bilan **4**

PROGRAMME (BO — SECONDE • MATHÉMATIQUES)

Contenus : Ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, droite numérique. Ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$. Nombres irrationnels : $\sqrt{2}$, π. Inclusions $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

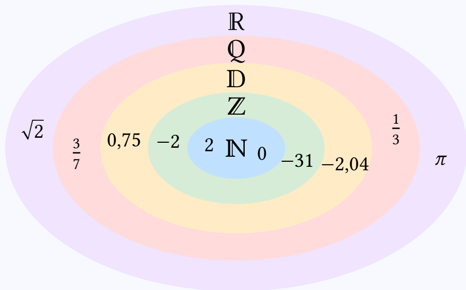
Démonstrations : (1) Le nombre rationnel $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal. (2) Le nombre réel $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Capacités : Déterminer le plus petit ensemble d'appartenance d'un nombre. Placer des réels sur la droite numérique. Donner un encadrement décimal à 10^{-n} près.

Tout le cours

1 Les ensembles de nombres

1.1 Entiers naturels et relatifs



Ensembles de nombres

Définitions.

— $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \ldots\}$ — entiers positifs ou nuls.
— $\mathbb{Z} = \{\ldots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \ldots\}$ — entiers positifs ou négatifs.

$4 \in \mathbb{N} \quad -2 \notin \mathbb{N} \quad -2 \in \mathbb{Z} \quad 0{,}5 \notin \mathbb{Z}$

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$$

Exercice. Parmi -5, 0, 3, $\frac{1}{2}$, -7, $\sqrt{4}$: lesquels appartiennent à $\mathbb{N}$? à $\mathbb{Z}$?

$\mathbb{N}$: $0, 3, \sqrt{4} = 2$. $\mathbb{Z}$: $-5, 0, 3, -7, \sqrt{4}$.

1.2 Décimaux, rationnels, réels

Définitions.

— **Décimaux $\mathbb{D}$:** nombres s'écrivant $\dfrac{a}{10^n}$ avec $a \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. Ce sont les fractions à **nombre fini de décimales**. *Ex :* $0{,}75 = \dfrac{75}{100} = \dfrac{3}{4} \in \mathbb{D}$
— **Rationnels $\mathbb{Q}$:** nombres s'écrivant $\dfrac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}^*$. *Ex :* $\dfrac{1}{3} = 0{,}333\ldots \in \mathbb{Q}$ (mais $\notin \mathbb{D}$)
— **Réels $\mathbb{R}$:** tous les nombres représentables sur la droite numérique.
— **Irrationnels :** réels qui ne sont pas rationnels. Ex : $\sqrt{2}$, π, $\sqrt{3}$.

Rationnels et décimaux

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Attention : $\in$ (appartient à) $\neq$ $\subset$ (inclus dans)
$5 \in \mathbb{Z}$: 5 est un **élément** de $\mathbb{Z}$. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$: $\mathbb{N}$ est un **sous-ensemble** de $\mathbb{Z}$.

Exercice. Classer du plus petit au plus grand ensemble : $\dfrac{1}{3}$, $\sqrt{9}$, -5, $0{,}1$, $\sqrt{2}$, $\dfrac{-6}{2}$.

$\sqrt{9} = 3 \in \mathbb{N}$; $-5 \in \mathbb{Z}$; $0{,}1 \in \mathbb{D}$; $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$; $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$; $\frac{-6}{2} = -3 \in \mathbb{Z}$.

2 Démonstrations au programme

Méthode : raisonnement par l'absurde.

Supposons que $\dfrac{1}{3} \in \mathbb{D}$. Alors $\exists\, a \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ tels que $\dfrac{1}{3} = \dfrac{a}{10^n}$.
Donc $10^n = 3a$.
Or $10^n = 2^n \times 5^n$ n'est divisible par 3 que si $3 \mid 2^n$ ou $3 \mid 5^n$. Mais $3 \nmid 2$ et $3 \nmid 5$, donc $3 \nmid 10^n$: **contradiction**.
Donc $\dfrac{1}{3} \notin \mathbb{D}$. **CQFD**

Démonstration $\frac{1}{3}$

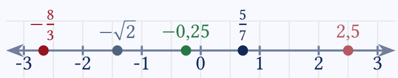
Méthode : raisonnement par l'absurde.

Supposons que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Alors $\sqrt{2} = \dfrac{a}{b}$ avec $a, b \in \mathbb{N}$, $b \neq 0$, fraction **irréductible**.
$\Rightarrow \dfrac{a^2}{b^2} = 2$, donc $a^2 = 2b^2$.
a^2 est pair $\Rightarrow$ a est pair (carré d'un impair est impair) $\Rightarrow \exists\, k \in \mathbb{N}$ tel que $a = 2k$.
Alors $4k^2 = 2b^2$, donc $b^2 = 2k^2$ pair, donc b pair.
a et b pairs : **contradiction** avec $\frac{a}{b}$ irréductible.
Donc $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$: $\sqrt{2}$ est **irrationnel**. **CQFD**

Démonstration $\sqrt{2}$

3 Classification et encadrements

3.1 Déterminer le plus petit ensemble d'appartenance



Classification

Stratégie.

1. Simplifier l'expression au maximum.
2. Est-ce un entier ≥ 0 ? $\rightarrow \mathbb{N}$
3. Est-ce un entier < 0 ? $\rightarrow \mathbb{Z}$
4. Est-ce une fraction à nb fini de décimales ? $\rightarrow \mathbb{D}$
5. Est-ce une fraction $\frac{a}{b}$? $\rightarrow \mathbb{Q}$
6. Sinon : $\rightarrow \mathbb{R}$ (irrationnel)

Exemples.

— $-\dfrac{1}{4} = -0{,}25 \in \mathbb{D}$
— $\dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3} = 0{,}333\ldots \in \mathbb{Q}$
— $\sqrt{36} = 6 \in \mathbb{N}$
— $\sqrt{6} \approx 2{,}449\ldots \in \mathbb{R}$ (irrationnel)
— $\dfrac{-3(\sqrt{2})^2}{12} = \dfrac{-6}{12} = -0{,}5 \in \mathbb{D}$

Exercice. Classer : $\sqrt{49}$, $\dfrac{5}{4}$, $-\dfrac{7}{3}$, $\sqrt{5}$, $\dfrac{(\sqrt{3})^2}{6}$.

$\sqrt{49} = 7 \in \mathbb{N}$; $\frac{5}{4} = 1{,}25 \in \mathbb{D}$; $-\frac{7}{3} \in \mathbb{Q}$; $\sqrt{5} \in \mathbb{R}$; $\frac{3}{6} = 0{,}5 \in \mathbb{D}$.

3.2 Encadrements et arrondis

Définition. Encadrer x à 10^{-n} près : trouver a tel que $a \leq x < a + 10^{-n}$ où a est le troncage à n décimales.

Arrondi à 10^{-n} **:**
- Si $(n+1)^{\text{e}}$ décimale ≥ 5 : arrondir **au-dessus**
- Si $(n+1)^{\text{e}}$ décimale < 5 : **tronquer**

Encadrements

Arrondis

Exemple. $\sqrt{2} \approx 1{,}41421\ldots$
- Encadrement à 10^{-3} : $1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$
- Arrondi à 10^{-2} : 4^{e} chiffre $= 4 < 5 \Rightarrow \sqrt{2} \approx 1{,}41$
- Arrondi à 10^{-3} : 5^{e} chiffre $= 2 < 5 \Rightarrow \sqrt{2} \approx 1{,}414$

Exercice. Donner un encadrement à 10^{-4} de $\sqrt{5}$ et de π.

$2{,}2360 < \sqrt{5} < 2{,}2361$. $3{,}1415 < \pi < 3{,}1416$.

Exercice de synthèse

1. Déterminer le plus petit ensemble auquel appartient chaque nombre : $\sqrt{16}$, $-\frac{3}{5}$, $\frac{7}{14}$, $\frac{(\sqrt{5})^2}{5}$, $\sqrt{7}$, $-\frac{5(\sqrt{3})^2}{15}$.
2. Vrai ou faux ? a) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$ b) $\pi \in \mathbb{Q}$ c) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$ d) $0{,}5 \in \mathbb{D}$
3. Donner un encadrement à 10^{-3} de $\sqrt{10}$.
4. Démontrer que $\frac{2}{3}$ n'est pas un nombre décimal.

1. $4 \in \mathbb{N}$; $-\frac{3}{5} \in \mathbb{Q}$; $\frac{1}{2} \in \mathbb{D}$; $1 \in \mathbb{N}$; $\sqrt{7} \in \mathbb{R}$; $-1 \in \mathbb{Z}$. *2. a) V; b) F; c) V; d) V. 3.* $3{,}162 < \sqrt{10} < 3{,}163$. *4. Absurde :* $\frac{2}{3} = \frac{a}{10^n} \Rightarrow 2 \times 10^n = 3a \Rightarrow 3 \mid 10^n$ *: impossible.*

Bilan

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Décimal : fraction finie ($\frac{a}{10^n}$).
Rationnel : toute fraction ($\frac{a}{b}$).
Irrationnel : ni fraction, ni décimal.

Test : $\frac{5}{8} \in \mathbb{D}$? Pourquoi ?

Démos clés (absurde) :
$\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$: $10^n = 3a$ impossible.
$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$: a et b seraient tous deux pairs.

Arrondi à 10^{-n} **:** regarder le $(n+1)^{\text{e}}$ chiffre.

Test : $\sqrt{9} \in$ quel ensemble minimal ?