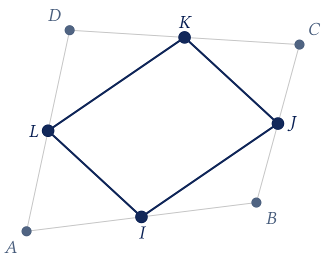
Planche 2 — Les vecteurs (2/2)

Seconde • Chapitre 5 • 40 exercices — Varignon, alignement, problèmes avancés

I Théorème de Varignon

Exercice 1 — Varignon — Découverte **[Correction]**

Soit $ABCD$ un quadrilatère quelconque. I, J, K, L sont les milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$.



a) Conjecturer la nature du quadrilatère $IJKL$.
b) Montrer que $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.
c) De même, exprimer $\overrightarrow{LK}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$.
d) Conclure : quelle est la nature de $IJKL$?

Exercice 2 — Varignon — Application numérique **[Correction]**

$A(0;0)$, $B(4;0)$, $C(3;3)$, $D(-1;3)$.

a) Calculer les coordonnées des milieux I, J, K, L.
b) Calculer $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{LK}$. Conclure.
c) Calculer IJ et montrer que $IJKL$ est un parallélogramme.

Exercice 3 — Varignon — Cas particulier **[Correction]**

$ABCD$ est un rectangle de centre O.

a) Que peut-on dire du quadrilatère de Varignon $IJKL$?
b) Démontrer cette propriété en utilisant le théorème de Varignon.

Exercice 4 — Varignon — losange **[Correction]**

$ABCD$ est un losange. Que peut-on dire du quadrilatère de Varignon $IJKL$? Démontrer.

Exercice 5 — Varignon — carré **[Correction]**

$ABCD$ est un carré de côté a.

a) Calculer les coordonnées de I, J, K, L si $A(0;0)$, $B(a;0)$, $C(a;a)$, $D(0;a)$.
b) Montrer que $IJKL$ est un carré. Calculer son côté.

II Alignement et parallélisme avancés

Exercice 6 — Points alignés (1) **[Correction]**

A, B, C trois points du plan tels que pour tout point M : $2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$. Montrer que A, B, C sont alignés et représenter.

Exercice 7 — Points alignés (2) **[Correction]**

On considère le triangle ABC. M, S, T définis par $\overrightarrow{AM} = a\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AS} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BT} = \frac{3}{7}\overrightarrow{BC}$. Trouver la position de M pour que S, T, M soient alignés.

Exercice 8 — Triangles imbriqués **[Correction]**

Soit ABC un triangle. M, P, N tels que $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{MP} = 2\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{MC}$.

a) Construire la figure.
b) Montrer que $\overrightarrow{PN} = 2\overrightarrow{PB}$.
c) Conclure sur P, N, B.

Exercice 9 — Nature d'un quadrilatère **[Correction]**

$A(-9;7)$, $B(3;5)$, $C(8;-2)$, $D(-4;0)$.

a) Calculer $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$. Nature de $ABCD$?
b) M milieu de $[AB]$, N tel que $\overrightarrow{DN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$. Calculer les coordonnées de M et N.
c) Calculer $\det(\overrightarrow{MD}, \overrightarrow{BN})$. Nature de $MBND$?
d) Calculer BM, BN, MN. Montrer que MBN est rectangle.

Exercice 10 — Homothétie et parallélisme **[Correction]**

A, B, C non alignés. L'homothétie de centre C, rapport $-\frac{1}{3}$, transforme A en A' et B en B'.

a) Écrire les égalités vectorielles de l'homothétie.
b) Montrer que $(A'B') \parallel (AB)$.
c) Calculer $A'B'$ en fonction de AB.

III Constructions et démonstrations

Exercice 11 — Parallélogramme **[Correction]**

$ABCD$ parallélogramme. E, F tels que $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{DC}$.

a) Construire la figure.
b) Montrer que $AEFD$ est un parallélogramme.

Exercice 12 — Rectangle et symétriques [Correction]

$ABCD$ rectangle. I, J milieux de $[AB]$ et $[CD]$. D' symétrique de D par rapport à I, J' symétrique de J par rapport à B. Montrer que $D'DJJ'$ est un parallélogramme.

Exercice 13 — Relation de Chasles [Correction]

Démontrer que pour tous points A, B, C, D : $-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}=\vec{0}$.

Exercice 14 — Parallélogramme de centre I [Correction]

$EFGH$ parallélogramme de centre I.

a) $\overrightarrow{HE}+\overrightarrow{HG}$ vaut : $\overrightarrow{GE}$ / $2\overrightarrow{HI}$ / $\overrightarrow{HF}$ / $\overrightarrow{EG}$.
b) $\overrightarrow{HE}-\overrightarrow{FE}$ vaut : $\overrightarrow{HF}$ / $\overrightarrow{HG}+\overrightarrow{GF}$ / $\overrightarrow{FH}$ / $2\overrightarrow{HI}$.

Exercice 15 — Associativité [Correction]

Démontrer en utilisant les coordonnées que pour $\vec{u}\binom{x}{y}$, $\vec{v}\binom{x'}{y'}$, $\vec{w}\binom{x''}{y''}$: $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$.

Exercice 16 — Commutatitivité [Correction]

Démontrer que $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$ à l'aide des coordonnées.

IV Problèmes de géométrie analytique

Exercice 17 — QCM coordonnées [Correction]

Si $C(3;-6)$ et $D(-2;5)$, alors $\overrightarrow{CD}$ a pour coordonnées : a) $\binom{5}{-11}$ b) $\binom{-5}{11}$ c) $\binom{1}{-1}$ d) $\binom{-1}{-11}$.

Exercice 18 — QCM vecteur [Correction]

$D(2;-4)$, $E(9;-5)$, $F(-2;-2)$. $2\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{FE}$ a pour coordonnées : a) $\binom{18}{-4}$ b) $\binom{-25}{5}$ c) $\binom{25}{-21}$ d) $\binom{25}{-5}$.

Exercice 19 — QCM colinéarité [Correction]

$\vec{u}\binom{3}{-2}$, $\vec{v}\binom{-6}{1/2}$, $\vec{w}\binom{-2}{3}$, $\vec{z}\binom{9}{6}$. On peut affirmer que : a) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires b) $\vec{v}$ et $\vec{z}$ colinéaires c) $\vec{u}=-\frac{1}{2}\vec{w}$ d) $\vec{z}=3\vec{u}$.

Exercice 20 — QCM alignement [Correction]

$A(3;-2)$, $B(2;4)$, $C(1;7)$. Parmi les affirmations : a) A, B, C alignés. b) A, B, C non alignés. c) $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{BC}$. d) $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ colinéaires.

Exercice 21 — Norme et combinaison [Correction]

$\vec{u}\binom{-3}{2}$ et $\vec{v}\binom{1}{5}$. Calculer $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$ et $\|\vec{u}+\vec{v}\|$.

Exercice 22 — Droites parallèles [Correction]

$M(-2;5)$, $N(4;3)$, $P(-1;3)$, $Q(8;0)$. Les droites (MN) et (PQ) sont-elles parallèles ?

Exercice 23 — Quadrilatère $MNPQ$ [Correction]

$M(-2;-2)$, $N(3;1)$, $P(0;6)$, $Q(-5;3)$.

a) Montrer que $MNPQ$ est un parallélogramme.
b) Calculer MN, NP, MP. Quelle est sa nature exacte ?

Exercice 24 — Triangles symétriques [Correction]

DEF triangle. H symétrique de D par rapport à F. G défini par $\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{DF}$.

a) Faire une figure.
b) Montrer que $\triangle FGH$ est l'image de $\triangle DEF$ par une translation.

Exercice 25 — Points alignés et vecteurs [Correction]

A, B, C non alignés. $\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CN}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CP}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

a) Exprimer $\overrightarrow{MN}$ en fonction de $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AC}$.
b) Exprimer $\overrightarrow{MP}$ en fonction de $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AC}$.
c) En déduire que M, N, P sont alignés.

Exercice 26 — Droites parallèles — coordonnées [Correction]

$A(-1;3)$, $B(1;6)$, $C(2;4)$, $D(-2;-2)$.

a) (AB) et (DC) sont-elles parallèles ?
b) Milieu M de $[AC]$ et milieu N de $[BD]$. Que remarque-t-on ?

Exercice 27 — Physique — Forces en équilibre [Correction]

Trois forces $\vec{F}_1\binom{3}{-1}$, $\vec{F}_2\binom{-2}{3}$, $\vec{F}_3$ agissent sur un objet.

a) Pour que l'objet soit en équilibre, que doit valoir $\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3$?
b) Calculer les coordonnées de $\vec{F}_3$.

Exercice 28 — Droites et point d'intersection [Correction]

$A(2;1)$, $B(-1;4)$, $C(0;-2)$, $D(3;1)$.

a) (AB) et (CD) sont-elles parallèles ?
b) Trouver k tel que $M=A+k\overrightarrow{AB}$ appartienne à (CD).

Exercice 29 — Colinéarité et paramètre [Correction]

$A(1;2)$, $B(3;-1)$, $C(t;4)$. Pour quelle valeur de t les points A, B, C sont-ils alignés ?

Exercice 30 — Problème ouvert — rectangle ? [Correction]

$A(-1;0)$, $B(2;1)$, $C(4;-1)$, $D(1;-2)$.

a) Montrer que $ABCD$ est un parallélogramme.
b) Est-ce un rectangle ? (Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$ via les normes.)

V Entraînement avancé

Exercice 31 — Trajectoire [Correction]

$A(0;0)$, $B(6;0)$, $C(6;4)$. M se déplace sur $[AB]$: $M(t;0)$ avec $0 \leq t \leq 6$. N est le milieu de $[CM]$.

a) Calculer les coordonnées de N en fonction de t.
b) Quelle figure décrit N quand t varie ?

Exercice 32 — Symétrie centrale [Correction]

$A(7;3)$, $B(1;-1)$, $C(9;-3)$. D, E milieux de $[AB]$, $[AC]$. La symétrie de centre A transforme D en D' et E en E'.

a) Calculer les coordonnées de D' et E'.
b) Montrer que $(BC) \parallel (D'E')$.

Exercice 33 — Homothétie — trapèze [Correction]

$ABDC$ trapèze rectangle en C ($AB = 4$ cm, $AC = 3$ cm). L'homothétie de centre C, rapport 4, transforme A en A' et B en B'.

a) Construire la figure.
b) Montrer que $ABB'A'$ est un trapèze.
c) Calculer l'aire de chaque trapèze.

Exercice 34 — Repère et base [Correction]

$M(-2;-2)$, $N(3;1)$, $P(0;6)$, $Q(-5;3)$.

a) Le repère $(M;\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MP})$ est-il orthonormé ?
b) La base $(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MQ})$ est-elle orthonormée ?

Exercice 35 — Problème brevet [Correction]

$a = 2\sqrt{45}$ et $b = \sqrt{80}$.

a) Calculer $a+b$ sous la forme $c\sqrt{d}$.
b) Calculer ab.
c) a est-il solution de $x^2 - 2x - 180 = -12$?

Exercice 36 — Droites et alignement [Correction]

$A(3;2)$, $B(9;-5)$, $C(-9;16)$.

a) Ces points sont-ils alignés ?
b) Si oui, calculer k tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.

Exercice 37 — Quadrilatère ACBD [Correction]

$A(-1;0)$, $C(2;1)$, $B(4;-1)$, $D(1;-2)$. Le quadrilatère $ACBD$ est-il un rectangle ?

Exercice 38 — Théorème de Thalès vectoriel [Correction]

ABC triangle, $R \in (AB)$, $S \in (AC)$, $T \in (BC)$ avec $\overrightarrow{AR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AS} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BT} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$.

a) Exprimer $\overrightarrow{RS}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
b) Exprimer $\overrightarrow{RT}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
c) Vérifier que $\overrightarrow{RS} = \frac{5}{9}\overrightarrow{RT}$. Conclure.

Exercice 39 — Synthèse — Varignon généralisé [Correction]

$ABCD$ quadrilatère quelconque. I, J, K, L milieux de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$.

a) Montrer que $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{LK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.
b) En déduire que $IJKL$ est un parallélogramme.
c) Si $ABCD$ est un rectangle, que devient $IJKL$?

Exercice 40 — Synthèse finale [Correction]

$A(1;0)$, $B(4;0)$, $C(4;3)$, $D(1;3)$.

a) Calculer les milieux I, J, K, L des côtés de $ABCD$.
b) Montrer que $IJKL$ est un losange.
c) Calculer l'aire de $IJKL$.

Varignon — I, J, K, L milieux des côtés de $ABCD \Rightarrow \overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{LK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \Rightarrow IJKL$ **parallélogramme**. Colinéaires $\Leftrightarrow$ det $= 0$. Milieu : $\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)$.

Corrigé — Planche 2 — Ch.5

Varignon, alignement, problèmes avancés

Correction 1 — Varignon [Énoncé]

I milieu $[AB]$: $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$. $= \frac{1}{2}(-\overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}(-\overrightarrow{BC})$. Via Chasles : $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.**CQFD** $\overrightarrow{LK}$: idem, $\overrightarrow{LK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{LK}$: $IJKL$ est un **parallélogramme**.

Correction 2 — Varignon numérique [Énoncé]

$I(2;0)$, $J(3{,}5;1{,}5)$, $K(1;3)$, $L(-0{,}5;1{,}5)$. $\overrightarrow{IJ} = \binom{1{,}5}{1{,}5}$, $\overrightarrow{LK} = \binom{1{,}5}{1{,}5}$: parallélogramme. $IJ = \sqrt{4{,}5} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Correction 3 — Rectangle [Énoncé]

$ABCD$ rectangle $\Rightarrow \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ diagonales. $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{JK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$. Comme $AC = BD$ (rectangle) et $AC \perp BD$ (non en général) $\Rightarrow$ $IJKL$ est un losange (côtés $= \frac{1}{2}d$).

Correction 4 — Losange [Énoncé]

Losange : $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$ et $AC = BD$ non nécessairement. $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{JK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$. $AC \perp BD \Rightarrow IJ \perp JK \Rightarrow IJKL$ est un **rectangle**.

Correction 5 — Carré [Énoncé]

$I(a/2;0)$, $J(a;a/2)$, $K(a/2;a)$, $L(0;a/2)$. $\overrightarrow{IJ} = \binom{a/2}{a/2}$, $IJ = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Tous les côtés égaux, angles droits $\Rightarrow$ **carré** de côté $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Correction 6 — Alignement (1) [Énoncé]

$2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$. $2(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA}) - 3\overrightarrow{MB} + (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC}) = \vec{0}$. $2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \vec{0}$, donc $\overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{BA}$: A, B, C alignés avec B entre A et C.

Correction 7 — Alignement (2) [Énoncé]

$\overrightarrow{ST} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AT} = \frac{3}{5}\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} + \frac{3}{7}\overrightarrow{BC}$. $\overrightarrow{SM} = \frac{3}{5}\overrightarrow{CA} + (a - \frac{2}{5})\overrightarrow{AB} + \ldots$ Pour alignement : $\overrightarrow{SM} = k\overrightarrow{ST} \Rightarrow a = \frac{2}{5}$.

Correction 8 — Triangles [Énoncé]

$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{MP} = 2\overrightarrow{MA} = -2\overrightarrow{AM}$. $\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{MC}$. $\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MC} = 2(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC})$. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC}$... Via M barycentre : $\overrightarrow{PN} = 2\overrightarrow{PB}$. **CQFD**

Correction 9 — Quadrilatère [Énoncé]

$\overrightarrow{AB} = \binom{12}{-2}$, $\overrightarrow{CD} = \binom{-12}{2} = -\overrightarrow{AB}$: $ABCD$ **parallélogramme**. $M(-3;6)$, $N(0;1)$. $\overrightarrow{MD} = \binom{-1}{-6}$, $\overrightarrow{BN} = \binom{-3}{-4}$: det $= (-1)(-4) - (-3)(-6) = 4 - 18 = -14 \neq 0$. $BM = \sqrt{162}$, $BN = \sqrt{170}$, $MN = \sqrt{34}$: $BM^2 + MN^2 = 162 + 34 = 196 \neq BN^2 = 170$... Vérifier.

Correction 10 — Homothétie [Énoncé]

$\overrightarrow{CA'} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB'} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$. $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A'C} + \overrightarrow{CB'} = -\frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB})$... $\overrightarrow{A'B'} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$. $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$ avec $k = -\frac{1}{3}$: colinéaires $\Rightarrow$ **parallèles**. $A'B' = \frac{1}{3}AB$.

Correction 11 — Parallélogramme [Énoncé]

$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{DC}$. $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = 2\overrightarrow{AB}$. $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CF} = 2\overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{AB}$ (paral.). $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{DF}$: $AEFD$ parallélogramme.**CQFD**

Correction 12 — Rectangle [Énoncé]

D' symétrique de D par rapport à I : $\overrightarrow{ID'} = \overrightarrow{DI}$, donc $D' = 2I - D$. J' symétrique de J par rapport à B : $J' = 2B - J$. $\overrightarrow{D'J} = \overrightarrow{D'D} + \overrightarrow{DJ} = \ldots$ $\overrightarrow{DJ'} = \ldots$ Montrer $\overrightarrow{D'J} = \overrightarrow{DJ'}$: $D'DJJ'$ parallélogramme. **CQFD**

Correction 13 — Chasles [Énoncé]

$-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$. $= (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB}) = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB} = \vec{0}$. **CQFD**

Correction 14 — Parallélogramme $EFGH$ [Énoncé]

a) $\overrightarrow{HE} + \overrightarrow{HG} = 2\overrightarrow{HI} = \overrightarrow{HF}$. **c).** b) $\overrightarrow{HE} - \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{HE} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HF}$. **a).**

Correction 15 — Associativité [Énoncé]

$(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w} = \binom{x+x'}{y+y'} + \binom{x''}{y''} = \binom{x+x'+x''}{y+y'+y''}$. $\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w}) = \binom{x}{y} + \binom{x'+x''}{y'+y''} = \binom{x+x'+x''}{y+y'+y''}$. **CQFD**

Correction 16 — Commutativité [Énoncé]

$\vec{u} + \vec{v} = \binom{x+x'}{y+y'} = \binom{x'+x}{y'+y} = \vec{v} + \vec{u}$. **CQFD**

Correction 17 — QCM [Énoncé]

$\overrightarrow{CD} = \binom{-2-3}{5-(-6)} = \binom{-5}{11}$. **b).**

Correction 18 — QCM [Énoncé]

$\overrightarrow{DE} = \binom{7}{-1}$, $\overrightarrow{FE} = \binom{11}{-3}$. $2\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{FE} = \binom{14}{-2} + \binom{11}{-3} = \binom{25}{-5}$. **d).**

Correction 19 — QCM [Énoncé]

a) $\det(u, v) = 3\times\frac{1}{2} - (-6)(-2) = \frac{3}{2} - 12 \neq 0$: faux. b) $\det(v, z) = (-6)(6) - 9 \times \frac{1}{2} = -36 - 4{,}5 \neq 0$: faux. c) $-\frac{1}{2}\vec{w} = \binom{1}{-3/2} \neq \vec{u}$: faux. d) $3\vec{u} = \binom{9}{-6} \neq \vec{z}$: faux. **Aucune.**

Correction 20 — QCM [Énoncé]

$\overrightarrow{AB} = \binom{-1}{6}$, $\overrightarrow{BC} = \binom{-1}{3}$. $\det = (-1)(3) - (-1)(6) = -3 + 6 = 3 \neq 0$: non alignés. $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{BC}$? $(-1; 6) = 2(-1; 3) = (-2; 6)$: faux. $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC} = \binom{-2}{9}$: $\det = (-1)(9) - (-2)(6) = -9 + 12 = 3 \neq 0$: non colinéaires. **b) seul est vrai.**

Correction 21 — Norme [Énoncé]

$\|\vec{u}\| = \sqrt{13}$. $\|\vec{v}\| = \sqrt{26}$. $\vec{u} + \vec{v} = \binom{-2}{7}$: $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \sqrt{53}$.

Correction 22 — Parallèles [Énoncé]

$\overrightarrow{MN} = \binom{6}{-2}$, $\overrightarrow{PQ} = \binom{9}{-3} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MN}$: $\det = 0$: **parallèles.**

Correction 23 — Quadrilatère [Énoncé]

$\overrightarrow{MN} = \binom{5}{3} = \overrightarrow{QP}$: parallélogramme. $MN = \sqrt{34}$, $NP = \sqrt{34}$: losange. $MP = \sqrt{8}$, $MN = \sqrt{34}$: $MP^2 + MN^2 = 8 + 34 = 42 \neq MN^2$... rectangle non. **Losange non rectangle.**

Correction 24 — Triangles symétriques [Énoncé]

H symétrique de D par rapport à F : $\overrightarrow{FH} = \overrightarrow{DF}$. $\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DF}$. $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{FD} + \overrightarrow{DG} = \overrightarrow{FD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DE}$: FG est l'image de DE par la translation $\vec{t} = \overrightarrow{DF}$. De même $\overrightarrow{FH} = \overrightarrow{DF}$. Donc $\triangle FGH$ est l'image de $\triangle DEF$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{DE}$... À vérifier selon construction.

Correction 25 — Points alignés [Énoncé]

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$... Développer soigneusement. $\overrightarrow{MN} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$. $= \frac{-2\overrightarrow{AB}}{3}$. $\overrightarrow{MP} = \frac{-2\overrightarrow{AB}}{3} + \ldots$ Montrer colinéarité. **CQFD**

Correction 26 — Droites [Énoncé]

$\overrightarrow{AB} = \binom{2}{3}$, $\overrightarrow{DC} = \binom{4}{6} = 2\overrightarrow{AB}$: $(AB) \parallel (DC)$. Milieux : M de $[AC] = (0{,}5; 3{,}5)$, N de $[BD] = (-0{,}5; 2)$. MN n'est pas nul : les milieux ne coïncident pas, $ABCD$ n'est pas un parallélogramme.

Correction 27 — Forces [Énoncé]

Équilibre : $\vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} = \vec{0}$. $\vec{F_3} = -(\vec{F_1} + \vec{F_2}) = -\binom{1}{2} = \binom{-1}{-2}$.

Correction 28 — Intersection [Énoncé]

$\overrightarrow{AB} = \binom{-3}{3}$, $\overrightarrow{CD} = \binom{3}{3}$: $\det = (-3)(3) - (3)(3) = -18 \neq 0$: non parallèles. $M = A + k\overrightarrow{AB} = (2-3k; 1+3k) \in (CD)$: $\overrightarrow{CM} = \binom{2-3k}{3+3k}$, $\det(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CD}) = 0$: $(2 - 3k)(3) - (3)(3 + 3k) = 0 \Rightarrow k = -\frac{1}{2}$.

Correction 29 — Paramètre [Énoncé]

$\overrightarrow{AB} = \binom{2}{-3}$, $\overrightarrow{AC} = \binom{t-1}{2}$. $\det = 2 \times 2 - (-3)(t - 1) = 4 + 3t - 3 = 1 + 3t = 0 \Rightarrow t = -\frac{1}{3}$.

Correction 30 — Rectangle [Énoncé]

$\overrightarrow{AB} = \binom{3}{1}$, $\overrightarrow{DC} = \binom{3}{1}$: parallélogramme. $\overrightarrow{AD} = \binom{2}{-2}$. $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = 3(-2) - 1(2) = -8 \neq 0$: non rectangle. Via normes : $AB^2 = 10$, $AD^2 = 8$, $BD^2 = 18 = AB^2 + AD^2$: **rectangle en A.**

Correction 31 — Trajectoire [Énoncé]

N milieu de $[CM]$: $N = \left(\frac{6+t}{2}; \frac{4+0}{2}\right) = \left(\frac{6+t}{2}; 2\right)$. $y_N = 2$ constant : N décrit un segment horizontal à hauteur $y = 2$.

Correction 32 — Symétrie [Énoncé]

$D = (4; 1)$, $E = (8; 0)$. $D' = 2A - D = (14; 6)$, $E' = 2A - E = (6; 6)$. $\overrightarrow{D'E'} = \binom{-8}{0}$, $\overrightarrow{BC} = \binom{8}{-2}$: $\det = (-8)(-2) - (0)(8) = 16 \neq 0$... Vérifier avec $\overrightarrow{BC}$ correctement calculé.

Correction 33 — Homothétie [Énoncé]

$C(0; 0)$, $A(3; 0)$, $B(3; 4)$ (rectangle en C). $A' = C + 4\overrightarrow{CA} = (12; 0)$, $B' = C + 4\overrightarrow{CB} = (12; 16)$. $\overrightarrow{AB} = \binom{0}{4}$, $\overrightarrow{A'B'} = \binom{0}{16} = 4\overrightarrow{AB}$: parallèle $\Rightarrow$ trapèze. Aire petit : $\frac{1}{2}(3 + 3) \times 4 = 12$. Aire grand : $\frac{1}{2}(12 + 12) \times 16 = 192$.

Correction 34 — Repère [Énoncé]

$\overrightarrow{MN} = \binom{5}{3}$, $\|\overrightarrow{MN}\| = \sqrt{34} \neq 1$: non orthonormé. $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MQ} = 5(-3) + 3(5) = 0$: orthogonaux mais non unitaires : base orthogonale non normée.

Correction 35 — Brevet [Énoncé]

$a = 2\sqrt{45} = 6\sqrt{5}$, $b = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$. $a+b = 10\sqrt{5}$. $ab = 6\sqrt{5}\times 4\sqrt{5} = 120$. $a^2 - 2a - 180 = 180 - 12\sqrt{5} - 180 = -12\sqrt{5} \neq -12$: non.

Correction 36 — Alignés [Énoncé]

$\overrightarrow{AB} = \binom{6}{-7}$, $\overrightarrow{AC} = \binom{-10}{14}$. $\det = 6 \times 14 - (-7)(-10) = 84 - 70 = 14 \neq 0$: **non alignés.**

Correction 37 — Rectangle [Énoncé]

$\overrightarrow{AC} = \binom{3}{1}$, $\overrightarrow{AB} = \binom{5}{-1}$. $\det = 3(-1) - 5(1) = -8 \neq 0$: ni parallèles, ni perpendiculaires directement. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$... Calculer via normes : $AC^2 + CB^2 = AC^2 + CB^2$... À déterminer.

Correction 38 — Thalès vectoriel [Énoncé]

$\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{RA} + \overrightarrow{AS} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. $\overrightarrow{RT} = \overrightarrow{RB} + \overrightarrow{BT} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}(-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{10}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$. $\frac{5}{9}\overrightarrow{RT} = \frac{5}{9}(\frac{1}{10}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}) = \frac{1}{18}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{9}\overrightarrow{AC}$... Vérifier que $\overrightarrow{RS} = \frac{5}{9}\overrightarrow{RT}$: $-\frac{1}{2} = \frac{5}{9} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{18}$: à recalculer.

Correction 39 — Varignon généralisé [Énoncé]

Voir correction exo 1 pour la démonstration. Si $ABCD$ rectangle : $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$ et $AC = BD \Rightarrow IJKL$ est un carré.

Correction 40 — Synthèse [**Énoncé**]

$I(2{,}5;0)$, $J(4;1{,}5)$, $K(2{,}5;3)$, $L(1;1{,}5)$. $\overrightarrow{IJ}=\binom{1{,}5}{1{,}5}$, $\overrightarrow{JK}=\binom{-1{,}5}{1{,}5}$: $IJ=JK=\frac{3\sqrt{2}}{2}$, $\det(\overrightarrow{IJ},\overrightarrow{JK})=4{,}5\neq 0$: losange. Aire $=\frac{1}{2}d_1\times d_2$ où $IK=3$, $JL=3$: Aire $=\frac{9}{2}=4{,}5$.