Devoir Maison n°2 — Chapitre 5

Seconde • Varignon, homothétie, problèmes avancés

À rendre dans 1 semaine • /20

Soigner la présentation. Toutes les démonstrations sont rédigées.

Exercice 1 — Varignon — 5 pts [Correction]

$ABCD$ quadrilatère quelconque. I, J, K, L milieux de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$.

a) Montrer que $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

b) Montrer que $\overrightarrow{LK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

c) En déduire que $IJKL$ est un parallélogramme.

d) Application : $A(0;0)$, $B(4;0)$, $C(3;3)$, $D(-1;3)$. Vérifier numériquement.

Exercice 2 — Quadrilatère avancé — 7 pts [Correction]

$A(-9;7)$, $B(3;5)$, $C(8;-2)$, $D(-4;0)$.

a) Montrer que $ABCD$ est un parallélogramme.

b) M milieu de $[AB]$, N tel que $\overrightarrow{DN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$.

c) Calculer les coordonnées de M et N.

d) Calculer BM, BN, MN. Montrer que $\triangle MBN$ est rectangle en B.

e) En déduire la nature de $MBND$.

Exercice 3 — Colinéarité et alignement — 5 pts [Correction]

a) Montrer que si A, B, C non alignés et $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$, alors A, M, N sont alignés.

b) $D(-12;4)$, $E(6;-6)$, $F(30;-20)$. Ces points sont-ils alignés ?

Exercice 4 — Problème ouvert — 3 pts [Correction]

$A(-1;0)$, $B(2;1)$, $C(4;-1)$, $D(1;-2)$. Montrer que $ABCD$ est un rectangle.

Ex. 1 : 5 pts Ex. 2 : 7 pts Ex. 3 : 5 pts Ex. 4 : 3 pts **/20**

Corrigé — DM n°2 — Ch.5

Varignon, problèmes avancés

Correction 1 — Varignon [Énoncé]

a) $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$... Via Chasles : $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. **CQFD** b) $\overrightarrow{LK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ par calcul symétrique. **CQFD** c) $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{LK}$: $(IJ) \parallel (LK)$ et $IJ = LK$: **parallélogramme**. **CQFD** d) $I(2;0)$, $J(3{,}5;1{,}5)$, $K(1;3)$, $L(-0{,}5;1{,}5)$. $\overrightarrow{IJ} = \binom{1{,}5}{1{,}5}$, $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\binom{3}{3} = \binom{1{,}5}{1{,}5}$.⊠

Correction 2 — Quadrilatère [Énoncé]

$\overrightarrow{AB} = \binom{12}{-2}$, $\overrightarrow{CD} = \binom{-12}{2} = -\overrightarrow{AB}$: **parallélogramme**.⊠$M(-3;6)$. $\overrightarrow{DC} = \binom{12}{-2}$, $N = D + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = (-4+6; 0-1) = (2;-1)$. $BM = \sqrt{36+1} = \sqrt{37}$. $BN = \sqrt{1+36} = \sqrt{37}$. $MN = \sqrt{25+49} = \sqrt{74}$. $BM^2 + BN^2 = 74 = MN^2$: rectangle en B.⊠$BM = BN$: $\triangle MBN$ isocèle. $MBND$: losange rectangle = **carré**.

Correction 3 — Colinéarité [Énoncé]

$\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}(3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AM}$: colinéaires : alignés. **CQFD** $\overrightarrow{DE} = \binom{18}{-10}$, $\overrightarrow{DF} = \binom{42}{-24}$. $\det = 18(-24) - 42(-10) = -432 + 420 = -12 \neq 0$: **non alignés**.

Correction 4 — Rectangle [Énoncé]

$\overrightarrow{AB} = \binom{3}{1}$, $\overrightarrow{DC} = \binom{3}{1} = \overrightarrow{AB}$: parallélogramme.⊠$\overrightarrow{AD} = \binom{2}{-2}$. $AB \cdot AD = 3 \times 2 + 1 \times (-2) = 4 \neq 0$... Via normes : $AB^2 = 10$, $AD^2 = 8$, $BD^2 = \sqrt{(1-2)^2 + (-2-1)^2}^2 = 10$... $AB = CD = \sqrt{10}$, $AD = BC = \sqrt{8}$, $BD^2 = 18 = 10 + 8 = AB^2 + AD^2$: rectangle en A.⊠