Chapitre 5 — Les vecteurs (2/2)

Seconde • Géométrie analytique

Table des matières

1 **Produit d'un vecteur par un réel** **2**
1.1 Définition et représentation 2
1.2 Vecteurs colinéaires — définition 2
2 **Coordonnées et déterminant** **2**
2.1 Coordonnées d'un vecteur 3
2.2 Déterminant de deux vecteurs 3
2.3 Démonstration au programme 3
3 **Alignement et parallélisme** **3**
3.1 Critères géométriques 4
4 **Milieu et distance** **4**
4.1 Milieu d'un segment 4
Exercice de synthèse **5**
Bilan **5**

PROGRAMME (BO — SECONDE • MATHÉMATIQUES)

Contenus : Produit d'un vecteur par un réel. Colinéarité de deux vecteurs. Coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$. Déterminant de deux vecteurs. Alignement et parallélisme. Distance entre deux points. Milieu.

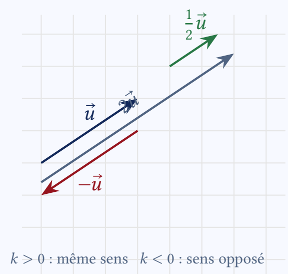
Démonstrations : Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul.

Capacités : Résoudre des problèmes de géométrie analytique : colinéarité, alignement, parallélisme, distance, milieu.

Tout le cours

1 Produit d'un vecteur par un réel

1.1 Définition et représentation



Définition. Soit $\vec{u}$ un vecteur et k un réel. Le vecteur $k\vec{u}$ est défini par :

— **Direction :** la même que $\vec{u}$ (ou nulle si $k = 0$).
— **Sens :** même sens si $k > 0$, sens opposé si $k < 0$.
— **Norme :** $\|k\vec{u}\| = |k| \times \|\vec{u}\|$.

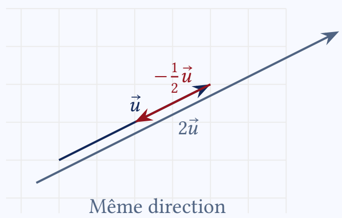
$$k\vec{u}\binom{x}{y} = \binom{kx}{ky} \quad \text{si } \vec{u}\binom{x}{y}$$

Produit par un réel

Exercice. $\vec{u}\binom{2}{-3}$. Calculer les coordonnées de $3\vec{u}$, $-2\vec{u}$, $\frac{1}{2}\vec{u}$.

$3\vec{u}\binom{6}{-9}$, $-2\vec{u}\binom{-4}{6}$, $\frac{1}{2}\vec{u}\binom{1}{-3/2}$.

1.2 Vecteurs colinéaires — définition



Définition. Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** s'il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ (ou $\vec{v} = k\vec{u}$).

Remarque : Le vecteur $\vec{0}$ est colinéaire à tout vecteur.

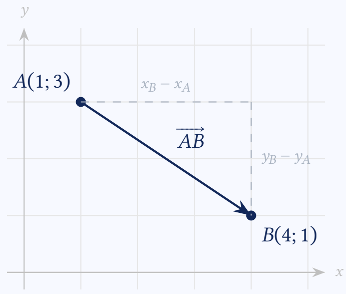
$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ colinéaires} \iff \exists k \in \mathbb{R} \text{ tel que } \vec{u} = k\vec{v}$$

Exercice. $\vec{u}\binom{4}{-6}$ et $\vec{v}\binom{-2}{3}$. Sont-ils colinéaires ?

$\vec{u} = -2\vec{v}$: oui, $k = -2$.

2 Coordonnées et déterminant

2.1 Coordonnées d'un vecteur



Propriété. Dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, si $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$:

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B - x_A\\ y_B - y_A\end{pmatrix}$$

Norme : $AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

Coordonnées de $\overrightarrow{AB}$

Exemple. $A(1;3)$ et $B(4;-1)$. $\overrightarrow{AB}\binom{3}{-4}$, $\quad AB = \sqrt{9+16} = 5$.

Exercice. $M(-2;1)$ et $N(3;5)$. Calculer $\overrightarrow{MN}$ et MN.

$\overrightarrow{MN}\binom{5}{4}$, $\quad MN = \sqrt{41}$.

2.2 Déterminant de deux vecteurs

Définition. Le **déterminant** de $\vec{u}\binom{x}{y}$ et $\vec{v}\binom{x'}{y'}$ est :

$$\det(\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix}x & x'\\ y & y'\end{vmatrix} = xy' - x'y$$

Critère de colinéarité :

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ colinéaires} \iff \det(\vec{u},\vec{v}) = 0$$

Déterminant et colinéarité

Exemple. $\vec{u}\binom{3}{2}$ et $\vec{v}\binom{6}{4}$: $\det = 3\times 4 - 6\times 2 = 0$: colinéaires.
$\vec{u}\binom{2}{1}$ et $\vec{v}\binom{3}{2}$: $\det = 2\times 2 - 3\times 1 = 1 \neq 0$: non colinéaires.

Exercice. $\vec{u}\binom{-2}{3}$ et $\vec{v}\binom{4}{-6}$. Calculer $\det(\vec{u},\vec{v})$.

$\det = (-2)(-6) - 4\times 3 = 12 - 12 = 0$ *: colinéaires.*

2.3 Démonstration au programme

Énoncé : $\vec{u}\binom{x}{y}$ et $\vec{v}\binom{x'}{y'}$ colinéaires $\iff xy' - x'y = 0$.

Sens ($\Rightarrow$) **:** Si $\vec{u} = k\vec{v}$, alors $x = kx'$ et $y = ky'$.

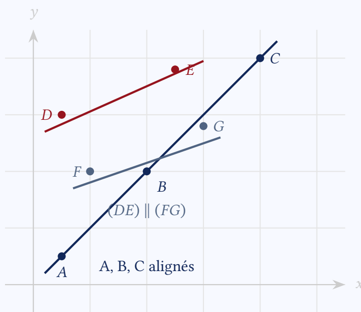
$$xy' - x'y = kx'y' - x'ky' = kx'y' - kx'y' = 0.$$

Sens ($\Leftarrow$) **:** Si $xy' - x'y = 0$, supposons $x' \neq 0$ (cas $y' \neq 0$ analogue). Posons $k = \dfrac{x}{x'}$. Alors $y = \dfrac{x}{x'}y' = ky'$, donc $\vec{u} = k\vec{v}$: colinéaires. **CQFD**

Démonstration

3 Alignement et parallélisme

3.1 Critères géométriques



Alignement : A, B, C alignés $\Longleftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ colinéaires $\Longleftrightarrow$ $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$

Parallélisme : $(AB) \parallel (CD)$ $\Longleftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ colinéaires $\Longleftrightarrow$ $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 0$

Exemple. $A(1;2)$, $B(3;5)$, $C(5;8)$. $\overrightarrow{AB}\binom{2}{3}$, $\overrightarrow{AC}\binom{4}{6}$. $\det = 2 \times 6 - 4 \times 3 = 0$: **alignés**.

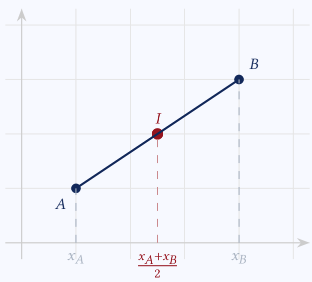
Exercice. $A(-2;1)$, $B(3;4)$, $C(2;2)$, $D(7;5)$. $(AB) \parallel (CD)$?

$\overrightarrow{AB}\binom{5}{3}$, $\overrightarrow{CD}\binom{5}{3}$. $\det = 5 \times 3 - 5 \times 3 = 0$: *oui, parallèles.*

Alignement et parallélisme

4 Milieu et distance

4.1 Milieu d'un segment



Propriété. Le milieu I de $[AB]$ avec $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ a pour coordonnées :

$$I\left(\frac{x_A + x_B}{2} \,;\, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

Distance : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

Exemple. $A(2;-1)$ et $B(6;5)$. $I\left(\frac{2+6}{2}; \frac{-1+5}{2}\right) = I(4;2)$. $AB = \sqrt{16+36} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$.

Exercice. $A(-3;1)$ et $B(5;7)$. Trouver le milieu et la distance AB.

$I(1;4)$. $AB = \sqrt{64+36} = 10$.

Milieu et distance

Exercice de synthèse

1. Soit $\vec{u}\binom{2}{-1}$ et $\vec{v}\binom{-4}{2}$. Calculer $\det(\vec{u},\vec{v})$. Les vecteurs sont-ils colinéaires ?
2. $A(1;3)$, $B(4;7)$, $C(7;11)$. Montrer que A, B, C sont alignés.
3. $\vec{u}\binom{3}{1}$ et $\vec{v}\binom{k}{4}$. Pour quelle valeur de k les vecteurs sont-ils colinéaires ?
4. $A(2;1)$, $B(8;5)$. Trouver le milieu I et calculer AB.
5. Montrer que $A(-2;1)$, $B(3;4)$, $C(5;5{,}2)$ sont alignés ou non.

1. $\det = 2\times2-(-4)\times(-1) = 4-4 = 0$ *: colinéaires.* *2.* $\overrightarrow{AB}\binom{3}{4}$, $\overrightarrow{AC}\binom{6}{8} = 2\overrightarrow{AB}$ *: alignés.* *3.* $3\times4-k\times1 = 0 \Rightarrow k = 12$. *4.* $I(5;3)$, $AB = \sqrt{36+16} = 2\sqrt{13}$. *5.* $\overrightarrow{AB}\binom{5}{3}$, $\overrightarrow{AC}\binom{7}{4{,}2}$, $\det = 5\times4{,}2-7\times3 = 21-21 = 0$ *: alignés.*

Bilan

Produit : $k\vec{u}\binom{x}{y} = \binom{kx}{ky}$

Colinéarité : $\vec{u} = k\vec{v} \Leftrightarrow \det(\vec{u},\vec{v}) = 0$

Déterminant : $\det(\vec{u},\vec{v}) = xy' - x'y$

Test : $\vec{u}\binom{2}{4}$ et $\vec{v}\binom{1}{2}$ colinéaires ?

Coordonnées : $\overrightarrow{AB}\binom{x_B-x_A}{y_B-y_A}$

Milieu : $I\left(\dfrac{x_A+x_B}{2};\dfrac{y_A+y_B}{2}\right)$

Distance : $AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

Test : $A(0;0)$, $B(1;2)$, $C(2;4)$ alignés ?