Chapitre 3 — Les vecteurs

Seconde • Géométrie vectorielle

Table des matières

PROGRAMME (BO — SECONDE • MATHÉMATIQUES)

Contenus : Vecteurs (direction, sens, norme), égalité, vecteur nul, vecteurs opposés, somme de vecteurs, relation de Chasles, soustraction, construction de points.

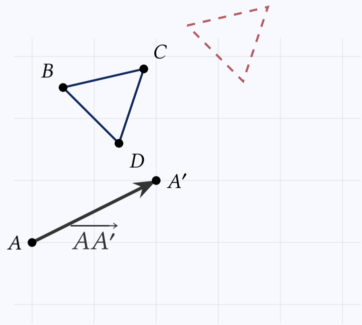
Démonstrations : $ABCD$ parallélogramme $\Longleftrightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

Capacités : Représenter et construire géométriquement des vecteurs sur figure ou quadrillage ; construire géométriquement la somme de deux vecteurs.

Tout le cours

1 Notion de vecteur

1.1 Translation et définition d'un vecteur



Vecteurs — intro

Définition. Une **translation** fait glisser une figure selon une direction, un sens et une longueur fixes. On la représente par une flèche : le **vecteur**.

Un vecteur $\overrightarrow{AA'}$ est caractérisé par :

— sa **direction** (droite (AA')),

— son **sens** (de A vers A'),

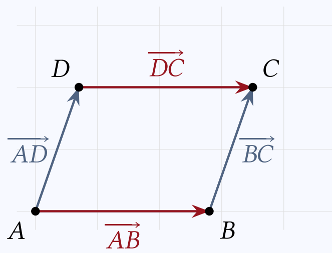
— sa **norme** $\|\overrightarrow{AA'}\|$ (longueur AA').

Méthode graphique. Pour construire l'image X' de X par la translation de vecteur $\vec{t}$: tracer la flèche $\overrightarrow{XX'} = \vec{t}$ (même direction, sens et longueur).

Exercice. Construire $B'C'D'$, image du triangle BCD par la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$.

Tracer depuis chaque sommet la flèche identique à $\overrightarrow{AA'}$: $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{AA'}$.

1.2 Vecteurs égaux



Définition. Deux vecteurs sont **égaux** s'ils ont la même direction, le même sens et la même norme.

On note $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

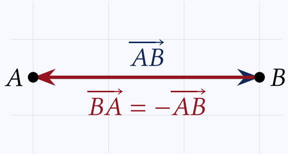
> **Propriété.** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \iff ABDC$ est un parallélogramme (éventuellement aplati).

Remarque. Un vecteur $\vec{u}$ a une infinité de représentants : toute flèche de même direction, sens et longueur.

Exercice. $ABCD$ est un parallélogramme. Lesquels sont vrais ? $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

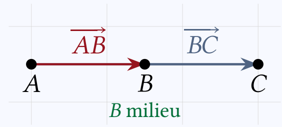
Vrais : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. Faux : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ car $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{DC} = -\overrightarrow{AB}$.

1.3 Vecteur nul et vecteurs opposés



Définitions.

- **Vecteur nul :** $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$ (origine et extrémité confondues, norme nulle).
- **Vecteurs opposés :** $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ (même direction, même norme, **sens contraire**).



$\overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$
B milieu de $[AC] \iff \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$

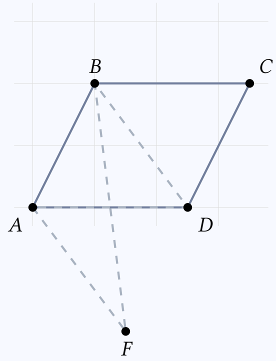
Exercice. Simplifier. a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}$ b) $-(-\overrightarrow{PQ})$ c) $-\overrightarrow{CD}$

a) $\vec{0}$ b) $\overrightarrow{PQ}$ c) $\overrightarrow{DC}$

1.4 Utiliser les vecteurs égaux pour démontrer

Méthode. Pour montrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme ou qu'un point est un milieu : traduire la condition géométrique en **égalité de vecteurs**.

Exemple. $ABCD$ et $AFBD$ sont deux parallélogrammes. Montrer que B est le milieu de $[CF]$.



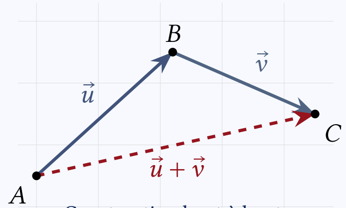
B mil. $[CF] \Leftrightarrow \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BF}$.
$ABCD$ paral. : $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}$.
$AFBD$ paral. : $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{DA}$.
Donc $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BF}$. **CQFD**

Exercice. $ABCD$ parallélogramme, M milieu de $[AB]$, N milieu de $[CD]$. Montrer que $AMND$ est un parallélogramme.

$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Donc $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{DN}$: $AMND$ est un parallélogramme. ***CQFD***

2 Somme de vecteurs

2.1 Addition de vecteurs — Relation de Chasles



Construction bout à bout

Relation de Chasles

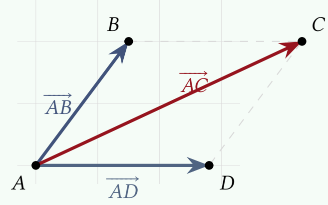
Définition. L'enchaînement de deux translations de vecteurs $\vec{u}$ puis $\vec{v}$ est la translation de vecteur $\vec{u}+\vec{v}$.

Construction géométrique (règle de Chasles) : Tracer $\vec{u}$ depuis un point A, obtenant B. Tracer $\vec{v}$ depuis B, obtenant C. Alors $\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{AC}$.

> **Relation de Chasles :** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$
> **Parallélogramme :** $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$

Exercice. Simplifier. a) $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MN}$ b) $\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{AM}$ c) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$

a) $\overrightarrow{AN}$ b) $\overrightarrow{AP}$ c) $\vec{0}$



(⇒) $ABCD$ paral. : $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$. Par Chasles : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

(⇐) Si $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$, par Chasles : $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$. Donc $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}\Rightarrow ABCD$ parallélogramme. **CQFD**

Construction graphique : tracer $\overrightarrow{AB}$ depuis A, puis $\overrightarrow{AD}$. Le point C est obtenu en complétant le parallélogramme.

2.2 Soustraction — Construire un point

> $\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+(-\vec{v})$
> **Construction :** Pour $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$: tracer $\overrightarrow{AC}$, puis depuis C tracer $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$.

Méthode graphique — construire un point F tel que $\overrightarrow{AF}=\vec{u}$.

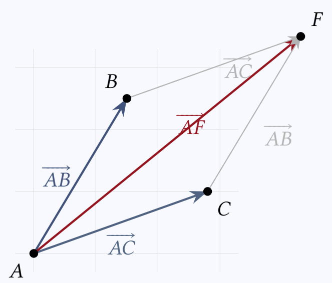
1. Placer l'extrémité du vecteur $\vec{u}$ à l'origine A.
2. F est l'extrémité.

Exercice. A, B, C donnés. Construire F tel que $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

Construction bout à bout. ABFC est un parallélogramme.

Exercice. $ABCD$ parallélogramme. Construire P tel que $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$. Que remarque-t-on ?

$P=C$ car $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ (propriété du parallélogramme).



Exercice de synthèse

$ABCD$ est un parallélogramme de centre O.

1. **[Graphique]** Reproduire la figure. Tracer $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC}$ et vérifier graphiquement que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.
2. Simplifier : $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$; $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}$.
3. Montrer que $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BC}$.
4. **[Graphique]** Construire P tel que $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$.

1. Construction sur la figure. 2. $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{CB}$; $\vec{0}$. 3. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB}) = 2\overrightarrow{BC}$. 4. $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA}$: bout à bout depuis A.

Bilan

Vecteur : direction + sens + norme.
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow$ même dir., sens, norme.
$\overrightarrow{AA} = \vec{0}$ $\quad \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$
Paral. : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

Chasles : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$
Soustraction : $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$
Paral. : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$
Construction bout à bout sur figure