# Chapitre 2 — Fractions, puissances et racines carrées

Seconde • Calcul numérique et littéral

## Table des matières



PROGRAMME (BO — SECONDE • MATHÉMATIQUES)

**Contenus :** Règles de calcul sur les puissances entières relatives et sur les racines carrées. Relation $\sqrt{a^2} = |a|$. Calculs numériques ou littéraux : puissances, racines carrées, fractions.

**Démonstrations :** (1) Pour $a, b \geq 0$ : $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$. (2) Pour $a, b > 0$ : $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

**Capacités :** Maîtriser les opérations sur les fractions, les puissances entières relatives et les racines carrées ; utiliser la notation scientifique.

Tout le cours

## 1 Fractions

**Exemple.**

$$A = \frac{5}{4} + \frac{6}{16} = \frac{20}{16} + \frac{6}{16} = \frac{26}{16} = \frac{13}{8} \qquad B = \frac{5}{3} - \frac{6}{5} = \frac{25}{15} - \frac{18}{15} = \frac{7}{15}$$

$$C = \frac{2}{-3} \times \frac{-5}{11} = \frac{10}{33} \qquad D = \frac{3}{4} \div \frac{-5}{8} = \frac{3}{4} \times \frac{8}{-5} = -\frac{6}{5}$$

$$E = \frac{8}{7} - \frac{4}{7} \times \frac{5}{3} = \frac{8}{7} - \frac{20}{21} = \frac{24}{21} - \frac{20}{21} = \frac{4}{21}$$

Calcul fractions

Fractions

**Propriétés.**

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b} \qquad \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d} \qquad \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+cb}{bd} \qquad \textit{Priorités :}\ \times \text{ et } \div \text{ avant } + \text{ et } -$$

**Exercice.** Calculer : $\frac{3}{5} + \frac{7}{10}$, $\frac{4}{3} - \frac{3}{4}$, $\frac{2}{5} \times \frac{15}{8}$, $\frac{9}{4} \div \frac{3}{8}$, $\frac{5}{6} - \frac{1}{6} \times \frac{3}{2}$.

$\frac{13}{10}$ ; $\frac{7}{12}$ ; $\frac{3}{4}$ ; $6$ ; $\frac{2}{3}$

**Exemple.**

$$A = \frac{7}{x-2} - \frac{5}{3} = \frac{21 - 5(x-2)}{3(x-2)} = \frac{31 - 5x}{3(x-2)}$$

$$B = 3 + \frac{5x}{2x+1} = \frac{3(2x+1) + 5x}{2x+1} = \frac{11x+3}{2x+1}$$

Même dénominateur

**Méthode.**

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+cb}{bd} \qquad \text{(multiplier en croix)}$$

**Exercice.** Réduire au même dénominateur :

a) $\frac{3}{x+1} - \frac{2}{5}$

b) $4 + \frac{x}{x-3}$

c) $\frac{1}{x} + \frac{2}{x+1}$

*a)* $\frac{13-2x}{5(x+1)}$ *b)* $\frac{5x-12}{x-3}$ *c)* $\frac{3x+1}{x(x+1)}$

## 2 Puissances

**Exemple.** $(-3)^4 = 81$ **mais** $-3^4 = -81$ (les parenthèses changent tout !)

**Définition.**

> Pour $a \neq 0$ et $n$ entier non nul : $a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ fois}}$ $\quad a^1 = a \quad a^0 = 1 \quad 0^n = 0 \quad 1^n = 1$

**Exercice.** Calculer : $(-2)^3$ ; $-2^3$ ; $(-1)^{10}$ ; $(-4)^0$ ; $(-5)^2$ ; $-5^2$.

$-8$ ; $-8$ ; $1$ ; $1$ ; $25$ ; $-25$

**Exemple.**

$$A = \frac{1}{4^2} = 4^{-2} \qquad B = 4^5 \times 4^7 = 4^{12}$$

$$C = \frac{5^4}{5^6} = 5^{-2} \qquad D = 7^3 \times (7^2)^6 = 7^{15}$$

$$E = 6^7 \times 9^7 = (6 \times 9)^7 = 54^7$$

Puissances

Puissances (2)

**Propriétés.**

> $$a^n \times a^p = a^{n+p} \qquad \frac{a^n}{a^p} = a^{n-p} \qquad (a^n)^p = a^{n \times p} \qquad (ab)^n = a^n b^n$$
>
> $$a^{-1} = \frac{1}{a} \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

**Exercice.** Exprimer sous la forme d'une seule puissance : $3^4 \times 3^{-2}$ ; $\dfrac{2^7}{2^3}$ ; $(5^3)^2$ ; $\dfrac{1}{7^3}$ ; $4^5 \times 9^5$.

$3^2 = 9 \quad 2^4 = 16 \quad 5^6 \quad 7^{-3} \quad 36^5$

**Exemple.**

$$A = 4 \times 7 \times 10^{-5} \times 10^{-8} = 28 \times 10^{-13} = 2{,}8 \times 10^{-12}$$

$$B = \frac{7 \times 10^{-4} \times 5 \times 10^8}{56 \times 10^{-9}} = \frac{35}{56} \times 10^{13} = 6{,}25 \times 10^{12}$$

Notation scientifique

Notation sci. (2)

**Définition.**

> Un nombre est en **notation scientifique** s'il s'écrit $a \times 10^n$ avec $1 \leq |a| < 10$ et $n \in \mathbb{Z}$.
>
> $$10^n \times 10^p = 10^{n+p} \qquad \frac{10^n}{10^p} = 10^{n-p} \qquad (10^n)^p = 10^{np}$$

**Exercice.** Écrire en notation scientifique : $3 \times 10^{-3} \times 5 \times 10^{-7}$ ; $\dfrac{8 \times 10^6}{4 \times 10^{-2}}$ ; $48 \times 10^{-3}$.

$1{,}5 \times 10^{-9} \quad 2 \times 10^8 \quad 4{,}8 \times 10^{-2}$

## 3 Racines carrées

**Exemple.** $3^2 = 9$ donc $\sqrt{9} = 3$. $\sqrt{6{,}76} = 2{,}6$. $\sqrt{2} \approx 1{,}4142$. $\sqrt{-5}$ n'existe pas.

$$\begin{array}{cccccc} \sqrt{0}=0 & \sqrt{1}=1 & \sqrt{4}=2 & \sqrt{9}=3 & \sqrt{16}=4 & \sqrt{25}=5 \\ \sqrt{36}=6 & \sqrt{49}=7 & \sqrt{64}=8 & \sqrt{81}=9 & \sqrt{100}=10 & \sqrt{121}=11 \\ \sqrt{144}=12 & \sqrt{169}=13 & & & & \end{array}$$

**Définition.**

La **racine carrée** de $a \geq 0$ est l'unique réel positif dont le carré est $a$. $\sqrt{a}$ n'existe pas si $a < 0$.

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab} \qquad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \qquad \left(\sqrt{a}\right)^2 = a \qquad \sqrt{a^2} = |a|$$

**Attention :** $\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$

**Exercice.** Calculer : $\sqrt{144}$ ; $\sqrt{0{,}09}$ ; $\sqrt{(-4)^2}$ ; $(\sqrt{7})^2$.

12 ; 0,3 ; 4 ; 7.

On calcule les carrés de $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$ et de $\sqrt{ab}$ :

$$\left(\sqrt{a} \times \sqrt{b}\right)^2 = a \times b \qquad \text{et} \qquad \left(\sqrt{ab}\right)^2 = ab$$

Ces deux quantités sont **positives** et ont le **même carré**, donc elles sont égales : $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$. **CQFD**

Démonstration $\sqrt{ab}$

On compare les carrés :

$$\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2 = a + b + 2\sqrt{ab} \qquad \text{et} \qquad \left(\sqrt{a+b}\right)^2 = a + b$$

Comme $a, b > 0$ : $2\sqrt{ab} > 0$, donc $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2 > \left(\sqrt{a+b}\right)^2$. Ces quantités étant positives : $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$. **CQFD**

Démonstration $\sqrt{a+b}$

**Exemple.**

$$A = \sqrt{32} \times \sqrt{2} = \sqrt{64} = 8 \qquad B = \sqrt{3} \times \sqrt{27} = \sqrt{81} = 9$$

$$C = \frac{\sqrt{98}}{\sqrt{2}} = \sqrt{49} = 7 \qquad D = \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{72}} = \sqrt{\frac{25}{36}} = \frac{5}{6}$$

Calculs racines

**Exercice.** Simplifier : $\sqrt{5} \times \sqrt{20}$ ; $\dfrac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}}$ ; $(3\sqrt{2})^2$ ; $\sqrt{8} \times \sqrt{18}$.

10 5 18 12

**Exemple.**

$$A = \sqrt{72} = \sqrt{36 \times 2} = 6\sqrt{2} \qquad B = \sqrt{45} = 3\sqrt{5} \qquad C = 3\sqrt{125} = 15\sqrt{5}$$

Carré parfait

**Méthode.**

> Pour écrire $\sqrt{n}$ sous la forme $a\sqrt{b}$ avec $b$ minimal :
> 1. Trouver le plus grand carré parfait $k^2$ divisant $n$.
> 2. Écrire $\sqrt{n} = \sqrt{k^2 \times b} = k\sqrt{b}$.

**Exercice.** Écrire sous la forme $a\sqrt{b}$ : $\sqrt{48}$ ; $\sqrt{75}$ ; $2\sqrt{200}$ ; $\sqrt{18}$.

$4\sqrt{3}$ ; $5\sqrt{3}$ ; $20\sqrt{2}$ ; $3\sqrt{2}$

**Exemple.**

$$A = 4\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 6\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$$
$$B = 7\sqrt{2} - 3\sqrt{5} + 8\sqrt{2} - \sqrt{5} = 15\sqrt{2} - 4\sqrt{5}$$
$$C = \sqrt{12} + 7\sqrt{3} - \sqrt{27} = 2\sqrt{3} + 7\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$$

Simplification

Simplification (2)

**Règle.**

> $k\sqrt{a} + l\sqrt{a} = (k+l)\sqrt{a}$ (même famille uniquement)
> **Attention :** $\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$

**Exercice.** Simplifier : $3\sqrt{5} - \sqrt{5} + 2\sqrt{5}$ ; $\sqrt{8} + \sqrt{18} - \sqrt{2}$ ; $\sqrt{75} - \sqrt{12} + 2\sqrt{3}$.

$4\sqrt{5}$ $4\sqrt{2}$ $5\sqrt{3}$

**Exemple.**

$$A = (\sqrt{3} - 4)^2 = 3 - 8\sqrt{3} + 16 = 19 - 8\sqrt{3}$$
$$B = (3 + \sqrt{5})^2 = 9 + 6\sqrt{5} + 5 = 14 + 6\sqrt{5}$$
$$C = (\sqrt{2} - \sqrt{5})(\sqrt{2} + \sqrt{5}) = 2 - 5 = -3$$

Développements

**Règle.**

> Les racines se traitent comme des inconnues : $(\sqrt{a} - b)^2 = a - 2b\sqrt{a} + b^2$
> $(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = a - b$

**Exercice.** Développer et réduire : $(\sqrt{2} + 3)^2$ ; $(\sqrt{5} - \sqrt{3})(\sqrt{5} + \sqrt{3})$ ; $(1 - \sqrt{7})^2$ ; $(2 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{3})$.

$11 + 6\sqrt{2}$ $2$ $8 - 2\sqrt{7}$ $-1 - \sqrt{3}$

## Bilan

**Fractions :** $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}=\dfrac{ad+cb}{bd}$ $\quad \dfrac{a}{b}\times\dfrac{c}{d}=\dfrac{ac}{bd}$ $\quad \dfrac{a}{b}\div\dfrac{c}{d}=\dfrac{a}{b}\times\dfrac{d}{c}$

**Puissances :** $a^n\times a^p=a^{n+p}$ $\quad \dfrac{a^n}{a^p}=a^{n-p}$ $\quad (a^n)^p=a^{np}$ $\quad (ab)^n=a^nb^n$ $\quad a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$

**Racines carrées :** $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ $\quad \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ $\quad \left(\sqrt{a}\right)^2=a$ $\quad \sqrt{a^2}=|a|$

**Démos :** $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ (comparer les carrés) • $\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{a+b}$ (car $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=a+b+2\sqrt{ab}>a+b$)