

Planche 02 – Chapitre 18 : Échantillonnage

Seconde • Estimation • Python • Problèmes en contexte

[Correction] accède directement au corrigé.

I Estimation – problèmes

Exercice 1 – Pièce équilibrée [Correction]

On lance une pièce équilibrée $n = 2\,500$ fois. On observe $f = 0,49$.

- Calculer $\frac{1}{\sqrt{2\,500}}$.
- Calculer $|f - p|$.
- La fréquence est-elle dans l'intervalle d'estimation ? Conclure.
- Si on répète l'expérience 100 fois, combien de fois s'attend-on à être dans l'intervalle ?

Exercice 2 – Urne et estimation [Correction]

Une urne contient des boules rouges et bleues. On tire $n = 1\,600$ boules avec remise. On obtient 420 boules rouges.

- Calculer la fréquence observée f .
- Calculer $\frac{1}{\sqrt{1\,600}}$.
- On suppose $p = 0,25$. Calculer $|f - p|$.
- La fréquence est-elle dans l'intervalle ? Conclure.

Exercice 3 – Sondage politique [Correction]

Un sondage auprès de $n = 900$ personnes donne $f = 0,53$ de personnes favorables à une mesure.

- Calculer $\frac{1}{\sqrt{900}}$.
- Donner l'intervalle d'estimation de p .
- Peut-on affirmer que plus de 50 % de la population est favorable ? Justifier.
- Même question pour $n = 10\,000$ et $f = 0,53$.

Exercice 4 – Contrôle qualité [Correction]

Une machine produit des pièces avec probabilité de défaut $p = 0,05$. On contrôle $n = 400$ pièces.

- Calculer $\frac{1}{\sqrt{400}}$.
- On trouve $f = 0,08$. Calculer $|f - p|$.
- La machine est-elle dans les normes ? (Dans l'intervalle d'estimation ?)
- Si $f = 0,06$, même question.

Exercice 5 – Comparer deux échantillons [Correction]

On estime $p = \frac{1}{3}$. Deux expériences :

- Expérience A : $n = 100$, $f = 0,38$.
- Expérience B : $n = 10\,000$, $f = 0,338$.

- Calculer $\frac{1}{\sqrt{n}}$ pour chacune.
- Chaque fréquence est-elle dans l'intervalle ?
- Laquelle des deux expériences est la plus précise ?

Exercice 6 – Taille minimale [Correction]

On veut estimer une probabilité avec une précision $\frac{1}{\sqrt{n}} \leq 0,025$.

- Résoudre $\frac{1}{\sqrt{n}} \leq 0,025$.
- Quelle est la taille minimale de l'échantillon ?
- Même question pour une précision $\leq \frac{1}{50}$.

II Python – lire et écrire

Exercice 7 – Analyser une fonction [Correction]

```

1 def boule(n):
2     s = 0
3     for k in range(n):
4         r = randint(1, 10)
5         if r <= 3:
6             s = s + 1
7     return(s / n)

```

- Quelle expérience modélise `boule(n)` ?
- Quelle est la probabilité théorique de succès ?
- Que renvoie cette fonction ?
- Pour $n = 10\,000$, quelle valeur attend-on ?

Exercice 8 – Tracer l'erreur – Python [Correction]

```

1 def erreur(n):
2     f = piece(n)
3     return abs(f - 0.5)

```

- a) Que calcule `erreur(n)` ?
- b) Que prédit la loi des grands nombres sur la valeur de `erreur(n)` quand n est grand ?
- c) Pour $n = 10\,000$, $\frac{1}{\sqrt{n}} = 0,01$. Si `erreur(10000)` renvoie `0,007`, est-on dans l'intervalle d'estimation ?

Exercice 9 – Adapter estim [Correction]

La fonction `estim(N, n)` est écrite pour $p = \frac{1}{3}$.

- a) Réécrire `estim` pour $p = \frac{1}{2}$ (pièce équilibrée).
- b) Réécrire `estim` pour $p = \frac{1}{4}$.
- c) Quelle valeur attend-on pour `estim(1000, 400)` dans les deux cas ?

Exercice 10 – Compter les succès [Correction]

```

1 def nb_succes(n):
2     s = 0
3     for k in range(n):
4         r = randint(1, 6)
5         if r <= 2:
6             s = s + 1
7     return(s)
    
```

- a) Quelle différence avec une fonction renvoyant une fréquence ?
- b) Quelle est la probabilité théorique ?
- c) Pour $n = 300$, quelle valeur de `nb_succes` attend-on en moyenne ?
- d) Réécrire pour renvoyer la fréquence.

Exercice 11 – Programme complet – dé pair [Correction]

Écrire un programme complet Python qui :

- a) Simule n lancers d'un dé.
- b) Compte les résultats pairs.
- c) Renvoie la fréquence de résultats pairs.
- d) Préciser la probabilité théorique.

Exercice 12 – Valeurs de sortie [Correction]

Pour chaque appel de fonction, donner la valeur renvoyée (ou l'ordre de grandeur attendu) :

- a) `piece(1)` (un seul lancer)
- b) `piece(10000)` (grande taille)
- c) `estim(1000, 10000)`
- d) `abs(-0.07)`
- e) `sqrt(2500)`

III Synthèse et problèmes

Exercice 13 – Médicament – essai clinique [Correction]

Un médicament est efficace avec probabilité $p = 0,7$. On teste sur $n = 400$ patients.

- a) Calculer $\frac{1}{\sqrt{400}}$.
- b) Si $f = 0,74$, est-on dans l'intervalle ? Conclure.
- c) Si $f = 0,80$, même question.

Exercice 14 – Dé biaisé [Correction]

On suspecte un dé d'être biaisé. On lance $n = 2\,500$ fois et on obtient $f = 0,22$ de « 1 ».

- a) Quelle est la probabilité théorique pour un dé équilibré ?
- b) Calculer $\frac{1}{\sqrt{2\,500}}$.
- c) Calculer $|f - p|$. Le dé semble-t-il biaisé ?

Exercice 15 – Estimation inverse [Correction]

On observe $f = 0,45$ sur un échantillon de taille $n = 100$.

- a) Calculer $\frac{1}{\sqrt{100}}$.

- b) Dans 95 % des cas, $p \in [f - \frac{1}{\sqrt{n}}; f + \frac{1}{\sqrt{n}}]$. Donner cet intervalle.
- c) $p = 0,5$ est-il compatible avec cette observation ?

Exercice 16 – Loi des grands nombres – graphique [Correction]

On trace f en fonction de $\log(n)$ pour une pièce :

n	f	$ f - 0,5 $
10	0,60	0,10
100	0,54	0,04
1 000	0,502	0,002
10 000	0,499	0,001

- a) $|f - p|$ diminue-t-elle quand n augmente ?
- b) Comparer $|f - p|$ avec $\frac{1}{\sqrt{n}}$ pour chaque n .
- c) Combien de cas sont dans l'intervalle d'estimation ?

Exercice 17 – Intervalle de confiance – construction [Correction]

$p = \frac{1}{2}$, $n = 400$.

- a) Calculer $\frac{1}{\sqrt{400}}$.
- b) Si $f = 0,48$, donner l'intervalle $[f - \frac{1}{\sqrt{n}}; f + \frac{1}{\sqrt{n}}]$.
- c) $p = 0,5$ est-il dans cet intervalle ?
- d) Si $f = 0,60$, même question.

Exercice 18 – Problème ouvert – taille optimale [Correction]

Un chercheur veut estimer une probabilité inconnue p .

- a) Il veut une précision $\frac{1}{\sqrt{n}} < 0,02$. Quelle taille minimale ?
- b) Avec $n = 2\,500$ et $f = 0,62$, donner l'intervalle de confiance.
- c) Si le chercheur dispose de 500 sujets supplémentaires (total $n = 3\,025$), améliore-t-il la précision ? Calculer $\frac{1}{\sqrt{3025}}$.

Récap : I Estimation (1–6) • II Python (7–12) • III Synthèse (13–18)

CORRIGÉ – PLANCHE 02 – CH.18

[Énoncé] revient à l'exercice

Correction 1 – Pièce équilibrée [Énoncé]

a) $\frac{1}{\sqrt{2500}} = \frac{1}{50} = 0,02$. b) $|0,49 - 0,5| = 0,01 \leq 0,02 \rightarrow$ dans. c) La fréquence est compatible avec $p = 0,5$. d) $100 \times 0,95 = 95$ fois environ.

Correction 2 – Urne et estimation [Énoncé]

a) $f = \frac{420}{1600} = 0,2625$. b) $\frac{1}{\sqrt{1600}} = \frac{1}{40} = 0,025$. c) $|0,2625 - 0,25| = 0,0125 \leq 0,025 \rightarrow$ dans. d) Compatible avec $p = 0,25$.

Correction 3 – Sondage politique [Énoncé]

a) $\frac{1}{\sqrt{900}} = \frac{1}{30} \approx 0,033$. b) $[0,53 - 0,033; 0,53 + 0,033] = [0,497; 0,563]$. c) $0,5 \in [0,497; 0,563] \rightarrow$ on ne peut pas l'exclure. Non concluant. d) $\frac{1}{\sqrt{10000}} = 0,01$. Intervalle $[0,52; 0,54]$. $0,5 \notin [0,52; 0,54] \rightarrow$ oui, plus de 50 % probable.

Correction 4 – Contrôle qualité [Énoncé]

a) $\frac{1}{\sqrt{400}} = 0,05$. b) $|0,08 - 0,05| = 0,03 \leq 0,05 \rightarrow$ dans. Norme respectée. c) $|0,06 - 0,05| = 0,01 \leq 0,05 \rightarrow$ dans. Normal.

Correction 5 – Comparer deux échantillons [Énoncé]

A : $\frac{1}{\sqrt{100}} = 0,1$. $|0,38 - 0,333| = 0,047 \leq 0,1 \rightarrow$ dans.
 B : $\frac{1}{\sqrt{10000}} = 0,01$. $|0,338 - 0,333| = 0,005 \leq 0,01 \rightarrow$ dans.
 B est 10× plus précise.

Correction 6 – Taille minimale [Énoncé]

a) $\frac{1}{\sqrt{n}} \leq 0,025 \Rightarrow \sqrt{n} \geq 40 \Rightarrow n \geq 1600$. b) $n_{\min} = 1600$. c) $\frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{50} \Rightarrow n \geq 2500$.

Correction 7 – Analyser une fonction [Énoncé]

a) Tirage dans $\{1, \dots, 10\}$, succès si ≤ 3 . b) $p = \frac{3}{10} = 0,3$. c) La fréquence de succès. d) $\approx 0,3$.

Correction 8 – Tracer l'erreur [Énoncé]

a) $|f - 0,5|$: écart entre fréquence et probabilité théorique. b) Tend vers 0 (loi des grands nombres). c) $0,007 \leq 0,01 \rightarrow$ dans l'intervalle. ☒

Correction 9 – Adapter estim [Énoncé]

a) Remplacer 1/3 par 1/2 (et de n) par $\text{piece}(n)$).
 b) Remplacer 1/3 par 1/4.
 c) Les deux renvoient $\approx 0,95$.

Correction 10 – Compter les succès [Énoncé]

a) Renvoie le nombre (entier) au lieu de la fréquence. b) $p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. c) $300 \times \frac{1}{3} = 100$ en moyenne. d) `return(s/n)`.

Correction 11 – Programme complet – dé pair [Énoncé]

```
def de_pair(n):
    s = 0
    for k in range(n):
        r = randint(1, 6)
        if r%2==0: s+=1
    return(s/n)
p = 1/2.
```

Correction 12 – Valeurs de sortie [Énoncé]

a) 0 ou 1 (un seul lancer, résultat aléatoire). b) $\approx 0,5$. c) $\approx 0,95$. d) $0 \cdot 07$. e) $50 \cdot 0$.

Correction 13 – Médicament [Énoncé]

a) $\frac{1}{\sqrt{400}} = 0,05$. b) $|0,74 - 0,7| = 0,04 \leq 0,05 \rightarrow$ dans. Compatible. c) $|0,80 - 0,7| = 0,10 > 0,05 \rightarrow$ hors. Résultat inhabituel.

Correction 14 – Dé biaisé [Énoncé]

a) $p = \frac{1}{6} \approx 0,167$. b) $\frac{1}{\sqrt{2500}} = 0,02$. c) $|0,22 - 0,167| = 0,053 > 0,02 \rightarrow$ hors intervalle. Le dé semble biaisé.

Correction 15 – Estimation inverse [Énoncé]

a) $\frac{1}{\sqrt{100}} = 0,1$. b) $[0,45 - 0,1; 0,45 + 0,1] = [0,35; 0,55]$. c) $0,5 \in [0,35; 0,55] \rightarrow$ compatible.

Correction 16 – Loi des grands nombres – tableau [Énoncé]

a) Oui : $0,10 \rightarrow 0,04 \rightarrow 0,002 \rightarrow 0,001$. b) $\frac{1}{\sqrt{n}} : 0,316/0,1/0,032/0,01$. Tous les écarts sont inférieurs. c) Les 4 cas sont dans l'intervalle.

Correction 17 – Intervalle de confiance [Énoncé]

a) $\frac{1}{\sqrt{400}} = 0,05$. b) $[0,43; 0,53]$. c) $0,5 \in [0,43; 0,53] \rightarrow$ oui. d) $[0,55; 0,65]$. $0,5 \notin [0,55; 0,65] \rightarrow$ non.

Correction 18 – Taille optimale [Énoncé]

a) $n \geq 2500$. b) $[0,62 - 0,02; 0,62 + 0,02] = [0,60; 0,64]$. c) $\frac{1}{\sqrt{3025}} = \frac{1}{55} \approx 0,018 < 0,02 \rightarrow$ oui, légèrement amélioré.