Planche 01 — Chapitre 18 : Échantillonnage

Seconde • Échantillon • Loi des grands nombres • Python

[Correction] accède directement au corrigé.

I Échantillon — définitions

Exercice 1 — Identifier un échantillon [Correction]

Indiquer la taille de l'échantillon dans chaque situation :

a) On teste 150 ampoules prélevées sur une production.
b) On interroge 800 lycéens sur leurs habitudes de lecture.
c) On lance un dé 200 fois.
d) On prélève 5 boules dans une urne avec remise.

Exercice 2 — Indépendance des tirages [Correction]

a) Un sac contient 3R et 2V. On tire 10 boules **avec remise**. Pourquoi les tirages sont-ils indépendants ?
b) Même question pour un tirage **sans remise**. Les tirages sont-ils indépendants ? Pourquoi ?

Exercice 3 — Fréquence observée [Correction]

On tire 50 boules avec remise dans une urne. On obtient 18 boules rouges.

a) Quelle est la fréquence observée de rouge ?
b) Exprimer ce résultat en pourcentage.
c) La probabilité théorique de rouge est $p = 0{,}4$. Calculer $|f - p|$.

Exercice 4 — Lire un tableau de fréquences [Correction]

On simule la fonction `piece(n)` pour différentes valeurs de n :

n	f
10	0,600
100	0,520
1 000	0,503
10 000	0,499

a) Quelle est la probabilité théorique de PILE ?
b) La fréquence se rapproche-t-elle de p quand n augmente ?
c) À quelle loi ce phénomène fait-il référence ?

Exercice 5 — Loi des grands nombres — pièce [Correction]

On lance une pièce équilibrée n fois.

a) Quelle est la probabilité théorique de FACE ?
b) On observe $f = 0{,}48$ pour $n = 200$. Ce résultat est-il surprenant ? Justifier.
c) Que prédit la loi des grands nombres pour $n = 1\,000\,000$?

Exercice 6 — Loi des grands nombres — dé [Correction]

On lance un dé équilibré à 6 faces. A = « obtenir un 6 ».

a) Calculer $p = P(A)$.
b) On effectue 60 lancers et on obtient 8 fois un 6. Calculer la fréquence observée.
c) Comparer f et p. Est-ce cohérent avec la loi des grands nombres ?

II Calcul de $1/\sqrt{n}$

Exercice 7 — Calculs directs [Correction]

Calculer $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ pour chaque valeur. Simplifier.

a) $n = 100$
b) $n = 400$
c) $n = 900$
d) $n = 2\,500$
e) $n = 10\,000$
f) $n = 1\,600$

Exercice 8 — Trouver n [Correction]

Déterminer la taille n de l'échantillon dans chaque cas :

a) $\dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0{,}1$
b) $\dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0{,}05$
c) $\dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0{,}02$
d) $\dfrac{1}{\sqrt{n}} = \dfrac{1}{30}$

Exercice 9 — Principe d'estimation — dans ou hors ? [Correction]

La probabilité théorique est $p = 0{,}5$. Pour chaque cas, indiquer si la fréquence est **dans** l'intervalle d'estimation ou **hors** :

a) $n = 100$, $f = 0{,}48$
b) $n = 400$, $f = 0{,}52$
c) $n = 400$, $f = 0{,}60$
d) $n = 2\,500$, $f = 0{,}49$
e) $n = 100$, $f = 0{,}35$
f) $n = 10\,000$, $f = 0{,}507$

Exercice 10 — Interprétation [Correction]

a) Pour $n = 400$, calculer $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.
b) On observe $f = 0{,}53$ pour $p = 0{,}5$. Calculer $|f - p|$. Conclure.
c) Que signifie « 95 % des cas » dans le principe d'estimation ?

III Python

Exercice 11 — Lire une fonction [Correction]

```python
def urne(n):
    s = 0
    for k in range(n):
        r = randint(1, 5)
        if r <= 2:
            s = s + 1
    return(s / n)
```

a) Que modélise cette expérience ?
b) Quelle est la probabilité théorique de succès ?
c) Que renvoie `urne(n)` ?
d) Vers quelle valeur tend `urne(n)` pour n grand ?

Exercice 12 — Modifier une fonction [Correction]

La fonction `de(n)` simule le lancer d'un dé et compte les résultats = 1 ou = 6 (p = 1/3).

a) Réécrire `de(n)` pour compter les résultats pairs.
b) Quelle est la nouvelle probabilité théorique ?
c) Réécrire `de(n)` pour compter uniquement le résultat = 3.

Exercice 13 — Lire `estim` [Correction]

```python
def estim(N, n):
    c = 0
    for k in range(N):
        f = de(n)
        if abs(f - 1/3) <= 1/sqrt(n):
            c = c + 1
    return(c / N)
```

a) Que compte la variable `c` ?
b) Que renvoie `estim(1000, 10000)` ?
c) Quelle valeur attend-on théoriquement ?
d) Pourquoi utilise-t-on `abs` ?

Exercice 14 — Compléter une fonction [Correction]

Compléter la fonction qui simule n lancers d'une pièce et renvoie la fréquence de PILE :

```python
def piece(n):
    s = 0
    for k in range(___):
        r = randint(___, ___)
        if r == ___:
            s = s + 1
    return(___)
```

Exercice 15 — Vrai ou faux ? [Correction]

a) « `randint(0,1)` peut renvoyer 2. »
b) « Plus n est grand, plus f est proche de p. »
c) « $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ augmente quand n augmente. »
d) « `estim(N, n)` renvoie toujours exactement 0,95. »
e) « Un échantillon doit être représentatif de la population. »

IV Approfondissement

Exercice 16 — Sondage [Correction]

Un sondage porte sur $n = 900$ personnes. On observe $f = 0{,}34$ de personnes favorables.

a) Calculer $\dfrac{1}{\sqrt{900}}$.
b) Donner un intervalle contenant p dans 95 % des cas.
c) Si $p = \frac{1}{3}$, l'estimation est-elle cohérente ?

Exercice 17 — Comparaison de tailles [Correction]

a) Comparer la précision pour $n = 100$ et $n = 10\,000$.
b) Pour obtenir une précision $\leq 0{,}02$, quelle taille minimale faut-il ?
c) Pour une précision $\leq 0{,}01$?

Exercice 18 — Synthèse [Correction]

Un contrôle qualité teste $n = 1\,600$ pièces et trouve $f = 0{,}026$ de pièces défectueuses. La probabilité théorique est $p = 0{,}025$.

a) Calculer $\dfrac{1}{\sqrt{1\,600}}$.
b) Calculer $|f - p|$.
c) La fréquence observée est-elle dans l'intervalle d'estimation ? Conclure.

Récap : I Échantillon (1–6) • II Calcul $1/\sqrt{n}$ (7–10) • III Python (11–15) • IV Approfondissement (16–18)

Corrigé — Planche 01 — Ch.18

[Énoncé] revient à l'exercice

Correction 1 — Identifier un échantillon [Énoncé]

a) $n = 150$. b) $n = 800$. c) $n = 200$. d) $n = 5$.

Correction 2 — Indépendance des tirages [Énoncé]

a) Avec remise : la composition est identique à chaque tirage $\longrightarrow$ indépendants.

b) Sans remise : la composition change $\longrightarrow$ pas indépendants.

Correction 3 — Fréquence observée [Énoncé]

a) $f = \dfrac{18}{50} = 0{,}36$. b) 36 %. c) $|f - p| = |0{,}36 - 0{,}40| = 0{,}04$.

Correction 4 — Lire un tableau [Énoncé]

a) $p = 0{,}5$ (pièce équilibrée). b) Oui : f se rapproche de 0,5 quand n augmente. c) Loi des grands nombres.

Correction 5 — Loi des grands nombres — pièce [Énoncé]

a) $p = \frac{1}{2} = 0{,}5$. b) $|0{,}48 - 0{,}5| = 0{,}02$: faible écart, pas surprenant. c) La fréquence sera très proche de 0,5.

Correction 6 — Loi des grands nombres — dé [Énoncé]

a) $p = \frac{1}{6} \approx 0{,}167$. b) $f = \frac{8}{60} \approx 0{,}133$. c) $|0{,}133 - 0{,}167| = 0{,}034$: écart modéré pour $n = 60$, cohérent.

Correction 7 — Calculs directs [Énoncé]

a) $\frac{1}{10} = 0{,}1$ b) $\frac{1}{20} = 0{,}05$ c) $\frac{1}{30} \approx 0{,}033$ d) $\frac{1}{50} = 0{,}02$ e) $\frac{1}{100} = 0{,}01$ f) $\frac{1}{40} = 0{,}025$

Correction 8 — Trouver n [Énoncé]

a) $\sqrt{n} = 10 \Rightarrow n = 100$. b) $\sqrt{n} = 20 \Rightarrow n = 400$. c) $\sqrt{n} = 50 \Rightarrow n = 2\,500$. d) $\sqrt{n} = 30 \Rightarrow n = 900$.

Correction 9 — Dans ou hors ? [Énoncé]

a) $|0{,}48 - 0{,}5| = 0{,}02 \leq 0{,}1 \longrightarrow$ **dans**. b) $|0{,}52 - 0{,}5| = 0{,}02 \leq 0{,}05 \longrightarrow$ **dans**. c) $|0{,}60 - 0{,}5| = 0{,}10 > 0{,}05 \longrightarrow$ **hors**. d) $|0{,}49 - 0{,}5| = 0{,}01 \leq 0{,}02 \longrightarrow$ **dans**. e) $|0{,}35 - 0{,}5| = 0{,}15 > 0{,}1 \longrightarrow$ **hors**. f) $|0{,}507 - 0{,}5| = 0{,}007 \leq 0{,}01 \longrightarrow$ **dans**.

Correction 10 — Interprétation [Énoncé]

a) $\frac{1}{\sqrt{400}} = \frac{1}{20} = 0{,}05$. b) $|0{,}53 - 0{,}5| = 0{,}03 \leq 0{,}05 \longrightarrow$ dans l'intervalle. c) 95 % des échantillons de taille n donnent une fréquence dans $[p - \frac{1}{\sqrt{n}}\,; p + \frac{1}{\sqrt{n}}]$.

Correction 11 — Lire une fonction [Énoncé]

a) Tirage aléatoire dans $\{1; 2; 3; 4; 5\}$, succès si ≤ 2. b) $p = \frac{2}{5} = 0{,}4$. c) La fréquence de succès sur n tirages. d) Vers 0,4.

Correction 12 — Modifier une fonction [Énoncé]

a) `if r%2==0: s+=1` (ou `if r in [2,4,6]`). $p = \frac{1}{2}$.

b) $p = \frac{1}{2}$.

c) `if r==3: s+=1`. $p = \frac{1}{6}$.

Correction 13 — Lire `estim` [Énoncé]

a) Nb de cas où $|f - \frac{1}{3}| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$. b) Proportion de ces cas sur 1000 simulations. c) $\approx 0{,}95$. d) Pour calculer une valeur absolue (écart signé $\longrightarrow$ écart positif).

Correction 14 — Compléter [Énoncé]

`range(n)`; `randint(0,1)`; `r==0` (ou `r==1`); `return(s/n)`.

Correction 15 — Vrai ou faux ? [Énoncé]

a) **Faux** : `randint(0,1)` renvoie 0 ou 1. b) **Vrai** (loi des grands nombres). c) **Faux** : $\frac{1}{\sqrt{n}}$ *diminue* quand n augmente. d) **Faux** : c'est une proportion aléatoire, proche de 0,95. e) **Vrai.**

Correction 16 — Sondage [Énoncé]

a) $\frac{1}{\sqrt{900}} = \frac{1}{30} \approx 0{,}033$. b) $[0{,}34 - 0{,}033; 0{,}34 + 0{,}033] = [0{,}307; 0{,}373]$. c) $p = \frac{1}{3} \approx 0{,}333 \in [0{,}307; 0{,}373] \longrightarrow$ cohérent.

Correction 17 — Comparaison de tailles [Énoncé]

a) $n = 100$: précision 0,1 ; $n = 10\,000$: précision 0,01 (10× meilleure). b) $\frac{1}{\sqrt{n}} \leq 0{,}02 \Rightarrow \sqrt{n} \geq 50 \Rightarrow n \geq 2\,500$. c) $\frac{1}{\sqrt{n}} \leq 0{,}01 \Rightarrow n \geq 10\,000$.

Correction 18 — Synthèse [Énoncé]

a) $\frac{1}{\sqrt{1600}} = \frac{1}{40} = 0{,}025$. b) $|0{,}026 - 0{,}025| = 0{,}001$. c) $0{,}001 \leq 0{,}025 \longrightarrow$ dans l'intervalle. La fréquence observée est compatible avec $p = 0{,}025$.