Chapitre 18 — Échantillonnage

Seconde • Échantillon • Loi des grands nombres • Estimation d'une probabilité

Objectifs : comprendre la notion d'échantillon • lire et comprendre une fonction Python • observer la loi des grands nombres • calculer $\frac{1}{\sqrt{n}}$ et interpréter le principe d'estimation.

Sommaire :

I Notion d'échantillon

Exemples.
— 200 cartes à puce prélevées : échantillon de taille 200.
— Sonder 1 000 électeurs : échantillon de taille 1 000.
— Lancer une pièce 50 fois : échantillon de taille 50.

Définition.

Un **échantillon de taille** n est constitué de n répétitions **indépendantes** de la même expérience aléatoire.

Exercice. Urne, 30 tirages avec remise. a) Taille de l'échantillon ? b) Pourquoi les tirages sont-ils indépendants ?

a) $n = 30$. *b) Avec remise : la composition ne change pas entre tirages.*

Exemple. Fonction `de(n)` simulant n lancers de dé ($p = \frac{1}{3}$) :

n	f observée
10	0,300
100	0,310
1 000	0,327
10 000	0,334

Propriété.

Quand n devient **grand**, la fréquence observée f est **le plus souvent proche** de la probabilité p.

Exercice. Pièce équilibrée, n lancers. a) p théorique de PILE ? b) Que prédit la loi des grands nombres pour $n = 10\,000$?

a) $p = \frac{1}{2}$. *b)* f *sera proche de* 0,5.

II Loi des grands nombres

III Estimation d'une probabilité

Exemple. Pour $n = 10\,000$: $\dfrac{1}{\sqrt{10\,000}} = \dfrac{1}{100} = 0{,}01$.
Sur N simulations, environ 95 % vérifient $|f - p| \leq 0{,}01$.
Propriété.

> Pour n assez grand, dans **95 % des cas** :
>
> $$|f - p| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Exercice. Pour $n = 400$, calculer $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ et interpréter.

$\dfrac{1}{\sqrt{400}} = \dfrac{1}{20} = 0{,}05$. *Dans 95 % des cas,* $|f - p| \leq 0{,}05$.

IV Fonctions Python

Contexte. Dé à 6 faces. Gagner si résultat = 1 ou 6. $p = \frac{1}{3}$.

```python
from random import *
from math import *

def de(n):
    s = 0
    for k in range(n):
        r = randint(1, 6)
        if r == 1 or r == 6:
            s = s + 1
    return(s / n)
```

Lecture. `randint(1,6)` : entier aléatoire entre 1 et 6. `s` : nb de gains. `s/n` : fréquence.
Exercice. Fonction `piece(n)` : `randint(0,1)`, `if r==0: s+=1`, `return s/n`. a) Que renvoie `piece(100)` ? b) Vers quelle valeur tend `piece(n)` pour n grand ?

a) Fréquence de 0 (PILE) sur 100 lancers. *b) Vers* $\frac{1}{2} = 0{,}5$.

```python
def estim(N, n):
    c = 0
    for k in range(N):
        f = de(n)
        if abs(f - 1/3) <= 1/sqrt(n):
            c = c + 1
    return(c / N)
```

Lecture.
— `abs(f-1/3)` : $\left|f - \frac{1}{3}\right|$.
— `c` : nb de cas où $|f - p| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$.
— `c/N` : proportion sur N simulations ($\approx 95\%$).

Exercice. Pour adapter `estim` à une pièce ($p = \frac{1}{2}$), quelle ligne modifier ?

Remplacer `1/3` *par* `1/2` *dans le* `if`.

Notion	À retenir
Échantillon	n répétitions indépendantes
Loi des grands nombres	$f \to p$ quand $n \to \infty$
Estimation (95 %)	$\lvert f - p \rvert \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$
`randint(a,b)`	entier aléatoire dans $[a;b]$
`abs(x)`	valeur absolue
`sqrt(n)`	$\sqrt{n}$