Chapitre 17 — Systèmes d'équations et droites

Seconde • Substitution • Combinaisons linéaires • Résolution graphique

Objectifs : déterminer si deux droites sont parallèles ou sécantes • résoudre un système de deux équations linéaires à deux inconnues • déterminer le point d'intersection de deux droites sécantes.

Introduction. $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 3x - 4y = -5 \end{cases}$ est un **système de deux équations à deux inconnues**. Un couple $(x; y)$ vérifiant *simultanément* les deux équations est une **solution**. Ex. : $(1; 2)$: $2 \times 1 - 2 = 0$ et $3 \times 1 - 4 \times 2 = -5$. Trois méthodes : **substitution**, **combinaisons linéaires**, **graphique**.

I Méthode de substitution

Exemple. $\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ x - 4y = 14 \end{cases}$

Étape 1 : isoler x dans (L2) : $x = 14 + 4y$.
Étape 2 : substituer dans (L1) : $3(14 + 4y) + 2y = 0 \Rightarrow 14y = -42 \Rightarrow y = -3$.
Étape 3 : $x = 14 + 4 \times (-3) = 2$. $\mathcal{S} = \{(2; -3)\}$.

Méthode.

1. Isoler une inconnue dans une équation.
2. La substituer dans l'autre équation.
3. Résoudre l'équation à une inconnue.
4. Calculer la deuxième valeur.

Efficace quand une inconnue s'isole **sans fraction**.

Exercice. Résoudre $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 3y = 10 \end{cases}$

II Méthode des combinaisons linéaires

Exemple. $\begin{cases} 3x - 2y = 11 \\ 6x + 3y = 15 \end{cases}$

(L1)×2 : $6x - 4y = 22$. Soustraire (L1)′ − (L2) : $-7y = 7 \Rightarrow y = -1$. Puis $x = 3$. $\mathscr{S} = \{(3; -1)\}$.

Méthode.

1. Multiplier les équations pour rendre les coefficients d'une inconnue **opposés** (ou égaux).
2. Additionner ou soustraire pour **éliminer**.
3. Résoudre, puis calculer l'autre inconnue.

$k_1(L_1) + k_2(L_2) \longrightarrow$ équation à **une** inconnue.

Exercice. Résoudre $\begin{cases} 4x + y = 7 \\ 2x - 3y = 5 \end{cases}$

Exemple. $\begin{cases} 3x - 2y = 7 \\ 5x + 3y = -1 \end{cases}$

(L1)×5, (L2)×3 : $\begin{cases} 15x - 10y = 35 \\ 15x + 9y = -3 \end{cases}$

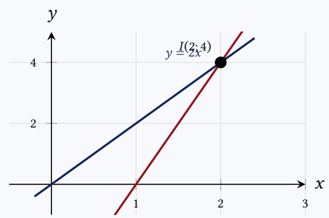
Soustraire : $-19y = 38 \Rightarrow y = -2$. Puis $x = 1$. $\mathscr{S} = \{(1; -2)\}$.

Méthode. Quand aucun coefficient ne coïncide : multiplier **chaque équation** par le coefficient de l'autre, puis soustraire.

Exercice. Résoudre $\begin{cases} 2x + 5y = 4 \\ 3x - 2y = 13 \end{cases}$

III Résolutions graphiques — trois cas

Exemple. $\begin{cases} -2x + y = 0 \\ 4x - y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ y = 4x - 4 \end{cases}$



$\mathscr{S} = \{(2; 4)\}$.

Propriété. Deux droites sécantes ($a_1 \neq a_2$) ont **exactement un** point d'intersection.

Exercice. Résoudre graphiquement $\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$.

Exemple. $\begin{cases} -3x + y = 1 \\ 6x - 2y = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3x + 1 \\ y = 3x - 3 \end{cases}$
Même $a = 3$, ordonnées différentes : **strictement parallèles**. $\mathscr{S} = \varnothing$.

Propriété.

$a_1 = a_2$ et $b_1 \neq b_2 \Rightarrow \mathscr{S} = \varnothing$.

Exercice. $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ -4x + 2y = 1 \end{cases}$ admet-il une solution ?

Exemple. $\begin{cases} -6x - 3y = -6 \\ 2x + y = 2 \end{cases} \Rightarrow$ les deux équations donnent $y = -2x + 2$: **confondues**.

Propriété.

$a_1 = a_2$ et $b_1 = b_2 \Rightarrow \mathscr{S} = \{(x; y) \mid y = ax + b\}$.

Exercice. $\begin{cases} 4x + 2y = 8 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$ admet-il une infinité de solutions ?

Cas	Conclusion
$a_1 \neq a_2$	1 solution (sécantes)
$a_1 = a_2$, $b_1 \neq b_2$	$\mathscr{S} = \varnothing$ (parallèles)
$a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$	∞ solutions (confondues)
Substitution	Isoler sans fractions
Combinaisons	Opposer les coefficients