# Chapitre 16 — Probabilités

Seconde • Expériences aléatoires, événements, probabilités, loi de probabilité, arbre des possibles

**Objectifs :** reconnaître une expérience aléatoire et son univers • calculer une probabilité en équiprobabilité • utiliser l'événement contraire • exploiter une loi de probabilité • déterminer une intersection et une réunion • utiliser un arbre des possibles à deux épreuves.



## I Expériences aléatoires et probabilités

**Exemple.** Lancer une pièce (PILE ou FACE), un dé à 6 faces, faire tourner une roue colorée.

**Définition / propriété.** Une **expérience aléatoire** possède plusieurs résultats possibles appelés **issues**, sans qu'on puisse prévoir laquelle se réalisera. L'ensemble de toutes les issues s'appelle l'**univers**, noté $\Omega$.

**Exercice.** Donner l'univers de : 1) lancer une pièce ; 2) lancer un dé à 6 faces ; 3) tirer une boule rouge ou bleue.

*1)* $\Omega = \{PILE; FACE\}$ *2)* $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ *3)* $\Omega = \{rouge; bleue\}$

**Exemple.** Lancer de dé : « nombre pair » = $\{2; 4; 6\}$ ; « inférieur ou égal à 2 » = $\{1; 2\}$.

**Définition / propriété.** Un **événement** est un ensemble d'une ou plusieurs issues.

— 1 seule issue : événement **élémentaire**.

— Toutes les issues : événement **certain**.

— Aucune issue : événement **impossible**.

**Exercice.** Dé : écrire $A$ = "multiple de 3" et $B$ = "> 4".

$A = \{3; 6\}$ $B = \{5; 6\}$

**Exemple.** $P$(événement) = 0,8 signifie 80 % de chances. $P = 0$ : impossible. $P = 1$ : certain.

**Définition / propriété.** La **probabilité** est un nombre dans $[0 ; 1]$. Quand toutes les issues ont la même chance : **équiprobabilité**.

$$P(A) = \frac{\text{issues favorables à } A}{\text{issues totales}}$$

**Exercice.** En équiprobabilité, toutes les issues ont ......... Une probabilité de 1 correspond à un événement ...............................................

*la même chance de se produire* | *certain*

**Exemple.** Dé à 6 faces : $E$ = "obtenir 3", $F$ = "nombre pair", $G$ = "> 3".

**Définition / propriété.** $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

- $E = \{3\}$ : $P(E) = \frac{1}{6}$.
- $F = \{2; 4; 6\}$ : $P(F) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.
- $G = \{4; 5; 6\}$ : $P(G) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Vidéo

**Exercice.** Dé à 6 faces. Calculer $P$("obtenir 1"), $P$("multiple de 2"), $P$("nombre < 5").

$\frac{1}{6}$ $\quad \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ $\quad \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

**Exemple.** 32 cartes, $E$ = "tirer un as" : 4 as, donc $P(E) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$.

**Définition / propriété.** Méthode :

1. Repérer l'univers et le nombre total d'issues.
2. Compter les issues favorables.
3. Former et simplifier la fraction.

Vidéo

**Exercice.** 32 cartes : calculer $P$(roi), $P$(trèfle), $P$(dame).

$\frac{4}{32} = \frac{1}{8}$ $\quad \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$ $\quad \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$

## II Contraire, loi, intersection et réunion

**Exemple.** Dé : contraire de « pair » = « impair ».

**Définition / propriété.** $\overline{A}$ est l'ensemble des issues **n'appartenant pas** à $A$.

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

*Car $A$ et $\overline{A}$ se partagent toutes les issues : $P(A) + P(\overline{A}) = 1$.*

**Exercice.** Dé, $A$ = "≥ 5". Décrire $\overline{A}$ et calculer $P(\overline{A})$.

$A = \{5; 6\}$, $\overline{A} = \{1; 2; 3; 4\}$, $P(\overline{A}) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

**Exemple.** Urne : 6 vertes, 3 jaunes, 11 noires (20 boules). $P(V) = 0{,}3$, $P(J) = 0{,}15$, $P(N) = 0{,}55$. Somme $= 0{,}3 + 0{,}15 + 0{,}55 = 1$ ⊠

**Définition / propriété.** Une **loi de probabilité** donne la probabilité de chaque issue. **La somme de toutes les probabilités vaut 1.**

**Exercice.** Jetons 1 à 5 : $p_1 = \frac{1}{15}$, $p_2 = \frac{4}{15}$, $p_4 = \frac{3}{15}$, $p_5 = \frac{4}{15}$. Trouver $p_3$, puis calculer $P$(pair).

$p_3 = 1 - \frac{12}{15} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$ $\quad P(pair) = \frac{4}{15} + \frac{3}{15} = \frac{7}{15}$

**Exemple.** Jetons numérotés 1 à 5. $E$ = "tirer un chiffre pair" ⇒ issues 2 et 4 : $P(E) = \frac{4}{15} + \frac{3}{15} = \frac{7}{15}$.

**Définition / propriété.** $\overline{E}$ = "ne pas tirer pair", issues 1, 3, 5 :

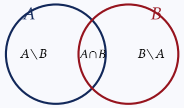
$$P(\overline{E}) = 1 - \frac{7}{15} = \frac{8}{15}.$$

Vidéo

**Exercice.** $F$ = "tirer > 3". Décrire $F$, calculer $P(F)$ et $P(\overline{F})$.

$F = \{4; 5\}$, $P(F) = \frac{7}{15}$, $P(\overline{F}) = \frac{8}{15}$

**Exemple.** $A = \{1; 2\}$, $B = \{1; 3; 4\}$ : $A \cap B = \{1\}$, $A \cup B = \{1; 2; 3; 4\}$.




**Définition / propriété.**

— $A \cap B$ : issues **communes** à $A$ et $B$.

— $A \cup B$ : issues appartenant à $A$ **ou** à $B$.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

*On soustrait $P(A \cap B)$ car les issues communes seraient comptées deux fois.*

**Exercice.** Avec $A = \{2; 4; 6\}$ et $B = \{1; 2; 3; 4\}$, trouver $A \cap B$ et $A \cup B$.

$A \cap B = \{2; 4\}$ $\quad A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 6\}$

**Exemple.** Dé : $A$ = "impair" = $\{1; 3; 5\}$, $B$ = "multiple de 3" = $\{3; 6\}$. $A \cap B = \{3\}$. $P(A \cup B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$.

**Définition / propriété.** $E = \{2; 4; 6\}$, $F = \{4; 5; 6\}$. $P(E) = \frac{1}{2}$, $P(F) = \frac{1}{2}$, $P(E \cap F) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

$$P(E \cup F) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Vidéo

**Exercice.** Dé : $E$ = "pair", $F$ = "$\geq 4$". Trouver $E \cap F$ et calculer $P(E \cup F)$.

$E \cap F = \{4; 6\}$, $P(E \cup F) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

## III Arbre des possibles

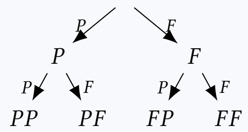
**Exemple.** Sac de 4 jetons colorés : l'arbre représente les 4 issues possibles au premier tirage.

**Définition / propriété.** Un **arbre des possibles** représente toutes les issues d'une expérience à plusieurs étapes. Chaque branche correspond à une possibilité.

**Exercice.** Citer une situation aléatoire à deux niveaux.

*Ex. : lancer deux fois une pièce ; tirer deux boules successivement.*

**Exemple.** Deux lancers d'une pièce ($P$ = PILE, $F$ = FACE). $E$ = "au moins une fois PILE".




Vidéo

4 issues : $PP$, $PF$, $FP$, $FF$. $E = \{PP; PF; FP\}$ : $P(E) = \frac{3}{4}$.

**Définition / propriété.** Issues : $PP$, $PF$, $FP$, $FF$ (équiprobables).

**Méthode.** Lister toutes les branches, repérer les issues favorables, compter.

**Alternative** (événement contraire) : $\overline{E}$ = "deux FACE" $\Rightarrow$ $P(\overline{E}) = \frac{1}{4}$, donc $P(E) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

**Exercice.** Deux lancers d'une pièce. Calculer $P$("exactement une FACE").

*Issues favorables : $PF$ et $FP$. $P = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.*

| Notion | Formule / À retenir |
|---|---|
| Équiprobabilité | $P(A) = \dfrac{\text{fav.}}{\text{total}}$ |
| Contraire | $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ |
| Loi de probabilité | Somme = 1 |
| Réunion | $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ |
| Incompatibles | $P(A \cap B) = 0 \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ |
| Arbre | Lister **toutes** les branches |