Chapitre 16 — Probabilités

Seconde • Expériences aléatoires, événements, probabilités, loi de probabilité, arbre des possibles

Objectifs : reconnaître une expérience aléatoire et son univers • calculer une probabilité en équiprobabilité • utiliser l'événement contraire • exploiter une loi de probabilité • déterminer une intersection et une réunion • utiliser un arbre des possibles à deux épreuves.

I Expériences aléatoires et probabilités

Exemple. Lancer une pièce (PILE ou FACE), un dé à 6 faces, faire tourner une roue colorée.

Définition / propriété. Une **expérience aléatoire** possède plusieurs résultats possibles appelés **issues**, sans qu'on puisse prévoir laquelle se réalisera. L'ensemble de toutes les issues s'appelle l'**univers**, noté Ω.

Exercice. Donner l'univers de : 1) lancer une pièce ; 2) lancer un dé à 6 faces ; 3) tirer une boule rouge ou bleue.

Exemple. Lancer de dé : « nombre pair » = $\{2;4;6\}$; « inférieur ou égal à 2 » = $\{1;2\}$.

Définition / propriété. Un **événement** est un ensemble d'une ou plusieurs issues.

— 1 seule issue : événement **élémentaire**.
— Toutes les issues : événement **certain**.
— Aucune issue : événement **impossible**.

Exercice. Dé : écrire A = "multiple de 3" et B = ">4".

Exemple. $P(\text{événement}) = 0{,}8$ signifie 80 % de chances. $P = 0$: impossible. $P = 1$: certain.

Définition / propriété. La **probabilité** est un nombre dans $[0\,;\,1]$. Quand toutes les issues ont la même chance : **équiprobabilité**.

$$P(A) = \frac{\text{issues favorables à } A}{\text{issues totales}}$$

Exercice. En équiprobabilité, toutes les issues ont .... Une probabilité de 1 correspond à un événement ....

Exemple. Dé à 6 faces : E = "obtenir 3", F = "nombre pair", G = "> 3".

Définition / propriété. $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

- $E = \{3\}$: $P(E) = \frac{1}{6}$.
- $F = \{2; 4; 6\}$: $P(F) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.
- $G = \{4; 5; 6\}$: $P(G) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Vidéo

Exercice. Dé à 6 faces. Calculer $P(\text{"obtenir 1"})$, $P(\text{"multiple de 2"})$, $P(\text{"nombre} < 5\text{"})$.

Exemple. 32 cartes, E = "tirer un as" : 4 as, donc $P(E) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$.

Définition / propriété. Méthode :

1. Repérer l'univers et le nombre total d'issues.
2. Compter les issues favorables.
3. Former et simplifier la fraction.

Vidéo

Exercice. 32 cartes : calculer $P(\text{roi})$, $P(\text{trèfle})$, $P(\text{dame})$.

II Contraire, loi, intersection et réunion

Exemple. Dé : contraire de « pair » = « impair ».

Définition / propriété. $\overline{A}$ est l'ensemble des issues **n'appartenant pas** à A.

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

Car A et $\overline{A}$ se partagent toutes les issues : $P(A) + P(\overline{A}) = 1$.

Exercice. Dé, A = "≥ 5". Décrire $\overline{A}$ et calculer $P(\overline{A})$.

Exemple. Urne : 6 vertes, 3 jaunes, 11 noires (20 boules). $P(V) = 0{,}3$, $P(J) = 0{,}15$, $P(N) = 0{,}55$. Somme $= 0{,}3 + 0{,}15 + 0{,}55 = 1$ ⊠

Définition / propriété. Une **loi de probabilité** donne la probabilité de chaque issue. **La somme de toutes les probabilités vaut 1.**

Exercice. Jetons 1 à 5 : $p_1 = \frac{1}{15}$, $p_2 = \frac{4}{15}$, $p_4 = \frac{3}{15}$, $p_5 = \frac{4}{15}$. Trouver p_3, puis calculer $P(\text{pair})$.

Exemple. Jetons numérotés 1 à 5. E = "tirer un chiffre pair" $\Rightarrow$ issues 2 et 4 : $P(E) = \frac{4}{15} + \frac{3}{15} = \frac{7}{15}$.

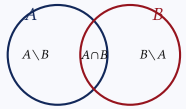
Définition / propriété. $\overline{E}$ = "ne pas tirer pair", issues 1, 3, 5 :

$$P(\overline{E}) = 1 - \frac{7}{15} = \frac{8}{15}.$$

Vidéo

Exercice. F = "tirer > 3". Décrire F, calculer $P(F)$ et $P(\overline{F})$.

Exemple. $A = \{1; 2\}$, $B = \{1; 3; 4\}$: $A \cap B = \{1\}$, $A \cup B = \{1; 2; 3; 4\}$.



Définition / propriété.

— $A \cap B$: issues **communes** à A et B.

— $A \cup B$: issues appartenant à A **ou** à B.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

On soustrait $P(A \cap B)$ car les issues communes seraient comptées deux fois.

Exercice. Avec $A = \{2; 4; 6\}$ et $B = \{1; 3; 4\}$, trouver $A \cap B$ et $A \cup B$.

Exemple. Dé : A = “impair” $= \{1;3;5\}$, B = “multiple de 3” $= \{3;6\}$. $A \cap B = \{3\}$. $P(A \cup B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$.

Définition / propriété. $E = \{2;4;6\}$, $F = \{4;5;6\}$. $P(E) = \frac{1}{2}$, $P(F) = \frac{1}{2}$, $P(E \cap F) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

$$P(E \cup F) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Vidéo

Exercice. Dé : E = “pair”, F = “≥ 4”. Trouver $E \cap F$ et calculer $P(E \cup F)$.

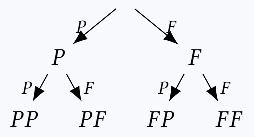
III Arbre des possibles

Exemple. Sac de 4 jetons colorés : l’arbre représente les 4 issues possibles au premier tirage.

Définition / propriété. Un **arbre des possibles** représente toutes les issues d’une expérience à plusieurs étapes. Chaque branche correspond à une possibilité.

Exercice. Citer une situation aléatoire à deux niveaux.

Exemple. Deux lancers d’une pièce (P = PILE, F = FACE). E = “au moins une fois PILE”.



Vidéo

4 issues : PP, PF, FP, FF. $E = \{PP; PF; FP\}$: $P(E) = \frac{3}{4}$.

Définition / propriété. Issues : PP, PF, FP, FF (équiprobables).

Méthode. Lister toutes les branches, repérer les issues favorables, compter.

Alternative (événement contraire) : $\overline{E}$ = “deux FACE” $\Rightarrow$ $P(\overline{E}) = \frac{1}{4}$, donc $P(E) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

Exercice. Deux lancers d’une pièce. Calculer P(“exactement une FACE”).

Notion	Formule / À retenir
Équiprobabilité	$P(A) = \dfrac{\text{fav.}}{\text{total}}$
Contraire	$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
Loi de probabilité	Somme = 1
Réunion	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
Incompatibles	$P(A \cap B) = 0 \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
Arbre	Lister **toutes** les branches